

Über klassische Teilchenlösungen
einer konforminvarianten Feldtheorie

KLAUS HERMANN LAGALLY

München

1967
—

Über klassische Teilchenlösungen
einer konforminvarianten Feldtheorie

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Klaus Hermann Lagally

München, im Januar 1967



Berichterstatter: Professor Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 22.2.67

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es wird ein System wechselwirkender klassischer Felder untersucht, und zwar ein Skalarfeld und ein Diracspinor, die skalar aneinander gekoppelt sind. Die Ruhmassen beider Felder sind Null; daher ist das gekoppelte System konforminvariant. Es wurde die Invarianzgruppe des Systems bestimmt und eine Reihe spezieller Lösungen abgeleitet. Dabei ergeben sich neben Wellenlösungen auch zwei Scharen von gebundenen Zuständen mit radialsymmetrischer Dichteverteilung.

Inhaltsübersicht

I.	Einführung und historischer Überblick	8
II.	Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze	14
III.	Spezielle Lösungen Teil 1	34
	1) Konstante Felder	34
	2) Translationsinvariante Lösungen mit $\varphi = 0$	35
	3) Translationsinvariante Lösungen mit $\varphi \neq 0$	37
	4) Wechselwirkungsfreie Lösungen	42
IV.	Spezielle Lösungen Teil 2:	
	Rotationssymmetrische Lösungen	45
	1) Winkelseparation	45
	2) Verhalten bei $\tau = 0$	47
	3) Verhalten für $\tau \rightarrow \infty$	50
	4) Winkelabhängigkeit von $\bar{\psi}\psi$	52
	5) Berechnung der Radialfunktionen	54
	Figur 1 - 4	60
	Anhänge:	
	A) Häufig gebrauchte Formeln	64
	B) Auflösung des Systems (II.21)	67
	C) Drehimpulseigenfunktionen	70
	D) Lösbarkeit des Systems (IV.65)	73
	E) Beispiel einer wechselwirkungsfreien Lösung	79
	Literaturverzeichnis	4

Literaturverzeichnis

- <1> H. A. Lorentz, The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat, II. Edition, Dover Publications, New York 1952
- <2> M. Abraham, Ann. Physik 10, 105 (1903)
" " Phys. Zeits. 5, 576 (1904)
- <3> F. Rohrlich, Classical Charged Particles, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. 1965
- <4> H. Poincaré, CR Acad. Sci. 140, 1504 (1905)
" " Rend. Circ. Mat. Palermo 21, 129 (1906)
- <5> H. M. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. London A 168, 389(1938)
- <6> G. Mie, Ann. Physik 37, 511 (1912); 39, 1 (1912);
40, 1 (1913)
- <7> H. Weyl, Raum - Zeit - Materie, 5. Aufl., Berlin 1923
- <8> M. Born, Proc. Roy. Soc. London A 143, 410 (1933)
M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London A 144,
425 (1934); A 147, 522 (1934); A 150, 141 (1935)
- <9> F. H. J. Cornish, Proc. Roy. Soc. London A 270, 501(1962)
- <10> C. Gilbert, Proc. Phys. Soc. 83, 181 (1964)
- <11> H. Kremer u. S. Kichenassamy, CR Acad. Sci. 250, 1192(1960)
- <12> P. Weiss, Proc. Roy. Soc. London A 169, 102 (1938)
- <13> F. Bopp, Ann. Physik 38, 345 (1940); 42, 573 (1943)
- <14> " " Z. Naturf. 1, 196 (1946); 3a, 564 (1948)
- <15> " " Z. Physik 125, 615 (1949)
- <16> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A 167, 148 (1938)
- <17> R. P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939(1948); 74, 1430 (1948)
- <18> A. D. Fokker, Z. Physik 58, 386 (1929)
" " " Physica 12, 145 (1932)
- <19> H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik 112, 65 (1939)
- <20> A. Landé, Phys. Rev. 60, 121 (1941)
A. Landé u. H. Thomas, Phys. Rev. 60, 514 (1941);
65, 175 (1944)
- <21> C. Møller u. H. Rosenfeld, Kgl. Danske Vid. Selsk.,
math.-fys. Medd. XVII/8 (1940)

- <22> B. Podolsky, Phys. Rev. 62, 68 (1941)
- <23> B. Podolsky u. P. Schwed, Rev. Mod. Phys. 20, 40 (1941)
- <24> F. Rohrlich, Phys. Rev. Lett. 12, 375 (1964)
- <25> J. A. Wheeler u. R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 17, 157 (1945)
- <26> D. Ivanenko u. A. Sokolov, Klassische Feldtheorie, 2. Auflage, Akademie-Verlag Berlin 1953
- <27> H. Hönl, Erg. exakt. Naturw. 26, 291 (1952)
- <28> D. D. Betts, H. Schiff u. W. B. Strickfaden, J. Math. Phys. 4, 334 (1963)
- <29> A. Borgardt, Zh. éksper. teor. Fiz. 33, 59 (1957)
- <30> R. J. Finkelstein, Phys. Rev. 75, 1079 (1949)
- <31> R. Finkelstein, R. LeLevier u. M. Ruderman, Phys. Rev. 83, 326 (1951)
- <32> R. Fornaguera, Nuovo Cim. 1, 132 (1955)
- <33> V. B. Glasko, F. Leriust, Ia. P. Terletskii u. S. F. Shushurin, Soviet Phys. JETP 8, 312 (1959)
- <34> W. Heisenberg, Z. Phys. 133, 65 (1952)
- <35> R. H. Hobart, Proc. Phys. Soc. 82, 201 (1963)
- <36> H. Jehle, unveröffentlicht (zitiert in <31>)
- <37> D. F. Kurdgelaidze, Soviet Phys. JETP 5, 941 (1957); 7, 1093 (1958); 9, 594 (1959); 11, 339 (1960)
- <37a> D. F. Kurdgelaidze, Cahiers de Phys. 15, 149 (1961)
- <38> B. Malenka, Phys. Rev. 85, 686 (1952)
- <39> J. A. McLennan jr., Nuovo Cim. 5, 640 (1957)
- <40> N. Mitskevich, Soviet Phys. JETP 2, 197 (1956)
- <41> N. Rosen, Phys. Rev. 55, 94 (1939)
- <42> N. Rosen u. H. B. Rosenstock, Phys. Rev. 85, 257 (1952)
- <43> L. Schiff, Phys. Rev. 84, 1 (1951)
" " Proc. Roy. Soc. London A 269, 277 (1962)
- <44> W. Thirring, Z. Naturf. 7a, 63 (1962)
- <45> A. A. Yatsenko u. S. V. Peletminskyi, Ukrayin. Fiz. Zh. 9, 581 (1964)
- <46> H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Z. Naturf. 14a, 441 (1959)
- <47> R. Finkelstein, C. Fronsdal u. P. Kaus, Phys. Rev. 103, 1571 (1956)

- <48> F. Gürsey, Nuovo Cim. 3, 988 (1956)
- <49> W. Heisenberg, Z. Naturf. 9a, 292 (1954)
" " Rev. Mod. Phys. 29, 269 (1957)
- <50> D. D. Ivanenko u. D. F. Kurdgelaidze, Soviet Phys. JETP 17, 399 (1963)
- <51> K. Just, Z. Naturf. 13a, 345 (1958)
- <52> K. Sekine, MPI preprint
- <53> E. C. G. Stueckelberg, Nature 144, 118 (1939)
" " " " Helv. Phys. Acta 14, 51 (1941)
- <54> S. D. Drell, Phys. Rev. 79, 220 (1950)
- <55> O. Hellmann, Ann. Univ. Turku 47, 9 (1961)
- <56> D. D. Ivanenko u. M. Mirianashvili, Soviet Phys. Doklady 1, 41 (1956)
- <57> F. A. Kaempffer, Phys. Rev. 99, 1614 (1955)
- <58> A. C. Menius jr. u. N. Rosen, Phys. Rev. 62, 436 (1942)
- <59> A. Pais, Nucl. Phys. 57, 96 (1964)
- <60> H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48 (1935)
- <60a> " " u. S. Sakata, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 19, 1084 (1937)
- <60b> " " , " " u. M. Taketani,
Proc. Phys. Math. Soc. Japan 20, 319 (1938)
- <61> E. Cunningham, Proc. London Math. Soc. 8, 77 (1910)
- <62> H. Bateman, Proc. London Math. Soc. 8, 223 (1910)
- <63> F. Bopp, Ann. Physik (7) 4, 96 (1959)
- <64> J. A. McLennan jr., Nuovo Cim. 3, 1360 (1956)
- <65> S. Lie u. F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1893, Band 3, S. 314 ff.
- <66> H. A. Kastrup, Ann. Physik (7) 9, 388 (1962)
- <67> D. M. Greenberger, Ann. Phys. 25, 290 (1963)
- <68> H. Steudel, Ann. Physik (7) 10, 102 (1962)
" " Z. Naturf. 17a, 129 (1962); 17a, 133 (1962)
- <69> E. Noether, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II 1918, 235
- <70> E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. 23, 253 (1951)
- <71> E. Bessel-Hagen, Math. Ann. 84, 258 (1921)
- <72> P. Roman, Theory of Elementary Particles,
North Holland Publishing Co., Amsterdam 1960

- <73> W. Pauli, Nuovo Cim. 6, 204 (1957)
- <74> F. Gürsey, Nuovo Cim. 7, 411 (1958)
- <75> B. Touschek, Nuovo Cim. 5, 1281 (1957)
- <76> A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien Bd. 2,
S. 268 ff., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1960
- <77> H. A. Bethe u. E. E. Salpeter, in:
Handbuch der Physik (S. Flügge Hrsg.), Band XXXV,
S. 430 ff., Springer Verlag, Berlin etc. 1957
- <78> L. Collatz, Funktionalanalysis und numerische Mathe-
matik, Springer Verlag, Berlin etc. 1964
- <79> F. J. Belinfante, Physica 6, 887 (1939)
- <80> G. Lüders, Ann. of Phys. 2, 1 (1957)
- <81> T. Kinoshita, Phys. Rev. 110, 978 (1958)
- <82> F. Sauter, Z. Physik 63, 803 (1930); 64, 295 (1930);
97, 777 (1935)
- <83> H. Cartan, Elementare Theorie der analytischen Funkti-
onen einer oder mehrerer komplexer Veränderlichen,
Bibliogr. Inst., Mannheim 1966

I. Einführung und historischer Überblick

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Maxwellschen Gleichungen keine stabile, stationäre rotationssymmetrische Lösung besitzen, die zur Beschreibung des klassischen Elektrons geeignet wäre $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle$. Während der Ansatz $\varphi \sim \frac{1}{r}$ für das Potential einer Punktladung auf einen divergenten Ausdruck für die Feldenergie führt, erhält man bei Annahme einer nicht punktförmigen Ladungsverteilung Radialkräfte, die das Elektron auseinanderreißen $\langle 2 \rangle$. POINCARÉ $\langle 4 \rangle$ hat, um dennoch Stabilität zu erreichen, einen "Kohäsionsdruck" nichtelektromagnetischer Natur gefordert, der die Coulombabstoßung kompensieren soll; PRYCE $\langle 5 \rangle$ hat die relativistische Konsistenz dieses Verfahrens aufgezeigt.

Einen anderen Weg hat MIE $\langle 6 \rangle$ gewiesen; geht man von der Lagrangedichte der Maxwellschen Theorie

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - j^{\mu} \varphi_{\mu}$$

mit

$$(2) \quad f_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}$$

zu einer allgemeineren Funktion $\mathcal{L}(f_{\mu\nu}, \varphi_{\mu})$ über und definiert:

$$(3) \quad F^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{\mu\nu}},$$

$$(4) \quad j^{\mu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}},$$

so erhält man formal genau die Maxwellschen Gleichungen, aber der Zusammenhang zwischen $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ ist jetzt im allgemeinen nichtlinear und abhängig von der Gestalt der gewählten Funktion $\mathcal{L}$. Durch einen geeigneten Ansatz für die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ läßt sich nun erreichen, daß es statische rotationssymmetrische Lösungen gibt, die überall endlich sind; WEYL $\langle 7 \rangle$ hat z.B. einen solchen Ansatz angegeben. Jedoch sind diese Theorien nicht eichinvariant; denn damit die Viererstrom-

dichte j^{μ} von Null verschieden ist, - und das wird man von einem Elektronenmodell fordern -, muß in $\mathcal{L}$ wegen (4) das Potential φ_{μ} explizit vorkommen.

Legt man dagegen auf die Eichinvarianz Wert, so können Ströme und Ladungen nur an Stellen auftreten, wo die Feldgleichungen nicht erfüllt sind, d.h. man erhält notwendig Singularitäten in $F^{\mu\nu}$ (8) - (12). Immerhin kann man jetzt erreichen, daß die Feldenergie für ein geladenes Teilchen endlich bleibt. Allerdings ist jetzt die Bewegung der Singularitäten durch die Feldgleichungen allein ohne Zusatzannahmen noch nicht bestimmt; man hat in Wirklichkeit ein gekoppeltes System Feld - Materie zu behandeln (13) - (25). Eine Übersicht über die hierbei auftretenden Probleme findet man etwa bei IVANENKO-SOKOLOV (26), HÖNL (27) und ROHRLICH (3).

Im Zuge der Entwicklung der Quantenmechanik verlor die klassische Theorie des Elektrons vorübergehend an Interesse; es zeigte sich jedoch bald, daß für die neu auftretenden Wellengleichungen, speziell die KLEIN-GORDON-Gleichung und die DIRAC-Gleichung, dieselben Schwierigkeiten wieder auftreten. Auch hier gibt es keine stationären, rotationssymmetrischen Lösungen, die überall endlich sind (abgesehen von dem trivialen Fall spezieller stehender Kugelwellen, den es auch in der Elektrodynamik gibt).

Es liegt nahe, analog zur Mieschen Theorie die Singularitäten durch nichtlineare Zusatzglieder zu dämpfen. So wurde die einfachste nichtlineare Verallgemeinerung der KLEIN-GORDON-Gleichung

$$(5) \quad \square \varphi - \kappa^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0$$

von zahlreichen Autoren untersucht (28) - (45). Sie liefert für $\kappa \neq 0$, $\lambda > 0$ eine diskrete Folge von radialsymmetrischen Lösungsfunktionen, die im Unendlichen wie $\frac{1}{r} e^{-\kappa r}$ abfallen, sowie zwei getrennte Kontinua, die asymptotisch gegen die Konstanten $\pm \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}}$ gehen. Für $\kappa = 0$ oder $\lambda \leq 0$ gibt es keine nichttrivialen singularitätenfreien Teilchenlösungen.

Im Zusammenhang mit HEISENBERG's Elementarteilchentheorie (<46>, dort auch Hinweise auf frühere Arbeiten) wurden nicht-lineare klassische Spinorgleichungen vom Typ

$$(6) \quad -i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \kappa \psi + g(\bar{\psi} \psi) \psi = 0$$

untersucht <31>, <37>, <39>, <47> - <52>. Dabei lag gewöhnlich das Hauptinteresse bei den lorentzkovarianten oder den Wellenlösungen; FINKELSTEIN, LE LEVIER und RUDERMAN <31> haben den Fall rotationssymmetrischer Dichten behandelt und eine zweifach unendliche Schar von überall beschränkten, nach außen stark abfallenden Lösungsfunktionen gefunden.

Allgemeiner kann man versuchen, mehrere Felder miteinander zu verkoppeln, um eine gegenseitige Dämpfung zu erreichen. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten an:

Einmal kann man die Feldgleichungen durch Einführen höherer Ableitungen so erweitern, daß sie mehrere Feldertypen umfassen, und dann die Kopplung durch Stetigkeitsforderungen herstellen; hierher gehören die "regularisierten Feldtheorien" von BOPP <13> - <15>, FEYNMAN <17>, LANDÉ und THOMAS <20>, MØLLER und ROSENFELD <21>, PODOLSKY <22>, <23> und STUECKELBERG <53>, die wir hier im folgenden nicht weiter betrachten wollen, ebensowenig wie die zahlreichen Ansätze zu einer "einheitlichen Feldtheorie" mit Einbeziehung der Gravitation.

Die zweite Möglichkeit besteht in der Einführung eines direkten Wechselwirkungsterms in der Lagrangefunktion. Wir wollen die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten, die sich dabei ergeben (<17>, <30>, <36>, <41>, <54> - <59>), nicht im einzelnen besprechen; insgesamt zeigt sich, daß die Struktur und Mannigfaltigkeit der vorhandenen rotationssymmetrischen Lösungen empfindlich vom Wechselwirkungsansatz abhängt.

Felder der Ruhmasse Null nehmen dabei in zweifacher Hinsicht eine Sonderstellung ein:

erstens kann man, anders als bei Fledgleichungen mit endlichen Massengliedern, auch für beliebig kleine Kopplungskonstanten nirgends die Wechselwirkungsglieder vernachlässigen,

Der Übergang von der freien zur nichtlinearen Theorie ändert den Charakter der Lösung im ganzen Raum, so daß Näherungsverfahren, die vom ungestörten Fall ausgehen, hier nicht ohne weiteres verwendbar sind;

zweitens sind, wie CUNNINGHAM <61> und BATEMAN <62> für die Elektrodynamik festgestellt haben (vgl. auch BOPP <63>) und McLENNAN <64> allgemein gezeigt hat, die Feldgleichungen freier Felder mit Ruhmasse Null invariant unter der Gruppe der konformen Transformationen von Raum und Zeit (LIE <65>; eine ausführliche Darstellung findet sich etwa bei KASTRUP <66>). Bei geeigneter Wahl des Wechselwirkungsterms in der Lagrangefunktion trifft dasselbe auch für das gekoppelte System zu <64>. Daraus folgt insbesondere, daß man durch eine Ähnlichkeitstransformation aus einer rotationssymmetrischen Lösung stets eine neue erhält, sofern man die Feldgrößen in geeigneter Weise mittransformiert, wobei man den Wert der Feldenergie noch vorschreiben kann. Somit kann sich kein diskretes Massen- bzw. Selbstenergiespektrum ergeben. Dagegen ist nach GÜRSEY <48> im Fall komplexer Felder die Gesamtladung eine konform-invariante Erhaltungsgröße, die zur Klassifikation der Lösungen geeignet erscheint.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Bezeichnung "Konforminvarianz" bzw. "Skaleninvarianz" in der Literatur gelegentlich in einem etwas anderen Sinne gebraucht wird, indem zugelassen wird, daß sich die Masse mittransformiert <37>, <46>, <63>, <67>, <68>. Sie übernimmt gewissermaßen die Rolle einer fünften Koordinate. Als Folge davon treten dann in den Erhaltungsgrößen, die den Erzeugenden des zugehörigen LIE-Rings mittels der NOETHERschen Sätze <69>, <70> zugeordnet sind, Feldgrößen zu verschiedenen Werten des Massenparameters auf; der physikalische Sinn einer so gearteten Erhaltungsgröße ist schwer einzusehen. Gänzlich entsprechende Verhältnisse bestehen in HEISENBERGS nichtlinearer Spinortheorie in Bezug auf den dort vorkommenden $\mathcal{L}$ - Parameter <46>. Wir wollen uns im weiteren an LIEs Definition der Konforminvarianz halten.

Bisher sind in der Literatur zwei Fälle von konforminvarianten nichtlinearen Feldtheorien näher untersucht worden:

einmal der Spezialfall $\chi = 0$ von Gleichung (5), der, wie wir oben bereits erwähnt haben, keine Bindungszustände liefert $\langle 37 \rangle - \langle 39 \rangle, \langle 45 \rangle$. Der zweite Fall ist die Gleichung $\langle 39 \rangle, \langle 48 \rangle$

$$(7) \quad -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \lambda (\bar{\psi}\psi)^{1/3} \psi = 0,$$

für die GÜRSEY $\langle 48 \rangle$ sowie IVANENKO und KURDGELAIDZE $\langle 50 \rangle$ Wellenlösungen abgeleitet haben. Rotationssymmetrische Lösungen sind anscheinend bisher nicht berechnet worden; dabei verstehen wir hier, wie allgemein bei spinoriellen Theorien, unter Rotations-symmetrie den Fall, daß die Dichten $\bar{\psi}\psi$ und $\psi^\dagger\psi$ nur vom Radius abhängen. In diesem Sinne bezeichnen wir z.B. den Grundzustand des Wasserstoffatoms in der DIRACtheorie als rotations-symmetrisch.

In der vorliegenden Untersuchung soll ein weiteres Modell einer konforminvarianten Feldtheorie betrachtet werden: ein skalares Feld φ sowie ein Spinorfeld ψ werden durch den im wesentlichen auf YUKAWA $\langle 60 \rangle$ zurückgehenden Wechselwirkungsterm $\bar{\psi}\psi\varphi$ in der Lagrangedichte aneinandergekoppelt. Die Ruhmassen nehmen wir für beide Felder zu Null an.

In Kapitel II gehen wir der Frage nach, unter welchen Transformationen das gekoppelte System invariant ist, und bestimmen die den gefundenen Invarianzgruppen zugeordneten Erhaltungsgroßen. Dabei ergibt sich außer der konformen Gruppe noch eine nicht kompakte LIE-Gruppe der Ordnung 3, die drei inneren Freiheitsgraden entspricht. Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe $SU(1,1)$, also denjenigen komplexen 2×2 -Matrizen mit der Determinante +1, welche eine indefinite hermitesche Form invariant lassen. An diskreten Transformationen finden wir außer der Raumspiegelung P und der CPT-Operation noch eine weitere diskrete Symmetrieoperation, die die Koordinaten fest läßt; Zeitumkehr T und Ladungskonjugation C scheinen sich nicht darstellen zu lassen.

Die Ergebnisse dieses Kapitels hängen wesentlich davon ab, daß wir klassisch rechnen und die Spinorgrößen als vertauschbar annehmen. Andernfalls erhält man eine andere "innere" Invarianzgruppe, die wir jedoch nicht näher untersucht haben.

In Kapitel III werden solche Lösungen der Feldgleichungen bestimmt, die entweder translationsinvariante Observablen liefern oder für die zumindest überall der Wechselwirkungsterm verschwindet. Dabei zeigt es sich, daß man für jedes φ , das der Wellengleichung

$$(8) \quad \square \varphi = 0$$

genügt, (mindestens) eine wechselwirkungsfreie Lösung der Feldgleichungen finden kann. Allerdings erhält man auf diese Weise nicht alle wechselwirkungsfreien Lösungen.

In Kapitel IV suchen wir rotationssymmetrische Lösungen zu bestimmen. Dabei kann man wie im Falle der Diracgleichung für das Spinorfeld höchstens erreichen, daß die bilinearen Ausdrücke $\bar{\psi}\psi$ und $\psi^+\psi$ drehinvariant werden; dies ist auf jeden Fall für S - und $P_{1/2}$ -Zustände erfüllt. Für sie werten wir die Differentialgleichungen für die Radialfunktionen numerisch aus. So erhalten wir zwei Scharen von nach außen stark abfallenden Bindungszuständen, die sich in der Anzahl der Nullstellen in den Radialfunktionen unterscheiden.

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Anhang A zusammengestellt; die Formeln sind kapitelweise durchnummeriert. Bei Hinweisen innerhalb eines Kapitels geben wir nur die Formelnummer, bei Formeln aus einem anderen Kapitel auch die Kapitelnummer an.

II. Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätze

Wir gehen aus von der Lagrangefunktion

$$(1) \quad W = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L} d^4x$$

mit

$$(2) \quad \mathcal{L} = -\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - \frac{1}{2} \varepsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi + \eta \bar{\psi} \psi \psi;$$

dabei ist ψ eine reelle skalare Feldgröße, ψ ein Diracspinor, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ der dazu adjungierte Spinor; ε und η sind zwei von Null verschiedene Konstanten, außerdem verwenden wir die Schreibweise

$$(3) \quad a \overleftrightarrow{\partial}_\mu b = a \frac{\partial b}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a}{\partial x^\mu} b.$$

Die Integration in (1) erstreckt sich über ein von zwei raumartigen Hyperflächen σ_1, σ_2 berandetes Raumzeitgebiet.

Wenn wir verlangen, daß W bei einer auf dem Rand des Integrationsgebietes verschwindenden Variation der Feldgrößen stationär sein soll, so erhalten wir in bekannter Weise (70) die Feldgleichungen

$$(4) \quad -i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \eta \psi \psi = 0,$$

$$(5) \quad i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + \eta \psi \bar{\psi} = 0,$$

$$(6) \quad \varepsilon \square \psi + \eta \bar{\psi} \psi = 0;$$

dabei sind wegen

$$(7) \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

die beiden ersten Gleichungen äquivalent.

Die Konstanten ε und η sind dimensionsbehaftet; durch geeignete Wahl der Einheiten für ψ und ψ sowie gegebenenfalls Vorzeichenumkehr bei (τ, t, φ) läßt sich stets erreichen, daß gilt:

(8)

$$\varepsilon = 1, \eta = 1,$$

was wir im folgenden stets annehmen wollen.

Wir suchen nun die Transformationen auf, unter denen die Feldgleichungen invariant bleiben. Soweit es sich dabei um kontinuierliche Gruppen handelt, bekommen wir auf Grund der NOETHERschen Sätze <69> gleichzeitig Erhaltungsgrößen.

Zunächst betrachten wir diejenigen Transformationen, die durch Koordinatentransformationen induziert werden. Dazu ersetzen wir

$$(9) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu, \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x'), \psi(x) \rightarrow \psi'(x')$$

und verlangen, daß sich die neue Wirkungsfunktion

$$(10) \quad W' = \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} \mathcal{L}'(x', \varphi'(x'), \psi'(x')) d^4x'$$

von der alten höchstens um einen konstanten Faktor und ein Oberflächenintegral unterscheidet; dann erhalten wir nämlich für die transformierten Größen dieselben Feldgleichungen wie vorher. Fernerhin beschränken wir uns vorerst auf lineare Substitutionen der Feldgrößen in sich, d.h. wir setzen

$$(11) \quad \varphi'(x') = T(x') \varphi(x), \psi'(x') = S(x') \psi(x),$$

wobei T ein reeller Skalar, S' eine komplexe 4×4 -Matrix ist. Wegen dieser Linearität müssen die drei Summanden in W einzeln im wesentlichen (d.h. bis auf ein Oberflächenintegral und einen gemeinsamen konstanten Faktor) invariant sein.

Wir betrachten zuerst das nur von φ allein abhängige Glied in W und erhalten:

$$(12) \quad \begin{aligned} W_\varphi' - 2W_\varphi &= \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} (-\frac{1}{2} \partial^\mu (T(x') \varphi(x)) \partial_\mu (T(x') \varphi(x)) d^4x' - \\ &- 2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (-\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x)) d^4x = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} \partial^\mu T \partial_\mu (\varphi^2 T) d^4x' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} T^2 \partial^\mu x^\nu \partial_\nu \varphi \partial_\mu x^\sigma \partial_\sigma \varphi \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4x + \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi d^4x \end{aligned}$$

oder

$$(13) \quad W_{\varphi}' - \lambda W_{\varphi} = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} \varphi^2 T \partial^{\mu'} T d\sigma_{\mu}' + \frac{1}{2} \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} \varphi^2 T \square' T d^4 x' - \\ - \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (T^2 \partial^{\mu'} x_{\rho} \partial_{\mu}' x^{\sigma} \parallel \frac{\partial x'}{\partial x} \parallel - \lambda \delta_{\rho}^{\sigma}) \partial^{\rho} \varphi \partial_{\sigma} \varphi d^4 x .$$

Dieser Ausdruck soll sich für beliebige Funktionen φ auf ein Oberflächenintegral reduzieren, also müssen wegen der Unabhängigkeit von φ und $\partial_{\mu} \varphi$ die Integranden der Raumintegrale einzeln verschwinden. So erhalten wir:

$$(14) \quad T(x')^2 \partial^{\mu'} x_{\rho} \partial_{\mu}' x^{\sigma} \parallel \frac{\partial x'}{\partial x} \parallel = \lambda \delta_{\rho}^{\sigma}$$

sowie

$$(15) \quad \square T(x) = 0 .$$

Wir gehen nun durch

$$(16) \quad x^{\mu'} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} , \parallel \frac{\partial x'}{\partial x} \parallel = 1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu} , \\ T = 1 + \delta T , \lambda = 1 + \delta \lambda$$

zu infinitesimalen Transformationen über. Dann ergibt sich:

$$(17) \quad \delta_{\rho}^{\sigma} (2 \delta T - \delta \lambda) - \partial_{\rho} \delta x^{\sigma} - \partial^{\sigma} \delta x_{\rho} + \delta_{\rho}^{\sigma} \partial_{\mu} \delta x^{\mu} = 0$$

und

$$(18) \quad \square \delta T = 0 .$$

Die erste Beziehung muß für beliebige Indexwerte ρ, σ erfüllt sein. Setzen wir $\rho = \sigma$ und summieren, so erhalten wir:

$$(19) \quad 4(2 \delta T - \delta \lambda) + 2 \partial_{\mu} \delta x^{\mu} = 0$$

oder

$$(20) \quad \delta T = -\frac{1}{4} \partial_{\mu} \delta x^{\mu} + \frac{1}{2} \delta \lambda .$$

Einsetzen dieses Wertes in (17) ergibt für die Größen δx_μ das Differentialgleichungssystem:

$$(21) \quad \partial_\rho \delta x^\epsilon + \partial^\epsilon \delta x_\rho = \frac{1}{2} \delta_\rho^\epsilon \partial_\mu \delta x^\mu.$$

Dieses System erlaubt eine anschauliche Deutung: addieren wir δ^ϵ_ρ und multiplizieren wir mit $dx^\rho dx_\rho$, so erhalten wir bis auf Größen höherer Ordnung:

$$(22) \quad d(x^\rho + \delta x^\rho) d(x_\rho + \delta x_\rho) = (1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \delta x^\mu) dx^\rho dx_\rho$$

oder

$$(23) \quad ds'^2 = (1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \delta x^\mu) ds^2,$$

d.h. die Transformation ist winkeltreu.

Die Auflösung des Systems (21) bringen wir im Anhang B; wir finden als infinitesimale Transformationen:

$$(24) \quad \delta x_\tau = a_\tau + \frac{1}{2}(\omega_{\tau\sigma} - \omega_{\sigma\tau}) x^\sigma + \varphi \cdot x_\tau + \\ + (2 c_\sigma x^\sigma x_\tau - c_\tau x^\sigma x_\sigma),$$

das sind genau die Erzeugenden der konformen Gruppe $\langle 65 \rangle, \langle 66 \rangle$. Ihnen entspricht nach (20):

$$(25) \quad \delta T = -2 c_\sigma x^\sigma - \varphi + \frac{1}{2} \delta \lambda.$$

Wir müssen nun noch weiterhin untersuchen, ob es möglich ist, die Matrix S in (11) so zu wählen, daß ganz W unter der konformen Gruppe invariant wird, oder ob man sich auf eine Untergruppe beschränken muß. Dazu betrachten wir zuerst das Wechselwirkungsglied:

$$(26) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}'(x') \psi'(x') \varphi'(x') d^4 x' - \lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x) d^4 x = \\ = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ((S(x') \psi(x))^+ \delta^0(S(x') \psi(x)) T(x') \varphi(x) \parallel \frac{\partial x'}{\partial x} \parallel - \lambda \bar{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x)) d^4 x = \\ = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}(x) (\delta^0 S^+(x') \delta^0 S(x') T(x') \parallel \frac{\partial x'}{\partial x} \parallel - \lambda) \psi(x) \varphi(x) d^4 x.$$

Damit dieser Ausdruck identisch verschwindet, muß sein:

$$(27) \quad \gamma^0 S^+(x') \gamma^0 S(x') T(x') \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| = \lambda.$$

Das von ψ allein abhängige Glied liefert endlich:

$$(28) \quad \begin{aligned} & \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu' \psi'(x') d^4 x' - \lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) d^4 x = \\ & = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\bar{\psi}(x) \gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu' (S(x') \psi(x)) \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| - \lambda \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x)) d^4 x = \\ & = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}(x) (\gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu' S(x')) \psi(x) \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4 x + \\ & + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi}(x) (\gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu' x^\nu \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| S(x') - \lambda \gamma^\nu) \partial_\nu \psi(x) d^4 x - \\ & - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \partial_\nu \bar{\psi}(x) (\gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu' x^\nu \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| S(x') - \lambda \gamma^\nu) \psi(x) d^4 x. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$(29) \quad \gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu' x^\nu \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| S(x') = \lambda \gamma^\nu,$$

$$(30) \quad \gamma^0 S^+(x') \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu' S(x') = 0.$$

Wir gehen nun wieder durch

$$(31) \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad T = 1 + \delta T,$$

$$S = 1 + \delta S, \quad \lambda = 1 + \delta \lambda$$

zu infinitesimalen Transformationen über. Die Gleichungen (27),

(29) und (30) gehen damit über in

$$(32) \quad \delta S + \gamma^0 \delta S^+ \gamma^0 + \delta T + \partial_\mu \delta x^\mu = \delta \lambda,$$

$$(33) \quad \gamma^\nu \delta S + \gamma^0 \delta S^+ \gamma^0 \gamma^\nu + \gamma^\nu \partial_\mu \delta x^\mu - \gamma^\mu \partial_\mu \delta x^\nu = \gamma^\nu \delta \lambda,$$

$$(34) \quad \partial_\mu (\gamma^\mu \delta S - \gamma^0 \delta S^+ \gamma^0 \gamma^\mu) = 0.$$

Wegen (20) erhalten wir aus (32)

$$(35) \quad \delta S + \gamma^0 \delta S + \gamma^0 = -\frac{3}{4} \partial_\mu \delta x^\mu + \frac{1}{2} \delta \lambda$$

und damit aus (33)

$$(36) \quad [\delta S, \gamma^\nu] = -\gamma^\mu \partial_\mu \delta x^\nu + \frac{1}{4} \gamma^\nu \partial_\mu \delta x^\mu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \delta \lambda.$$

Wir machen nun den Ansatz (Bezeichnungen siehe Anhang A)

$$(37) \quad \delta S = A + B_\rho \gamma^\rho + C_{\rho\sigma} \gamma^{\rho\sigma} + D_\rho \gamma^{\rho 5} + E \gamma^5.$$

Aus der Gleichung (36) ergibt sich damit

$$(38) \quad \begin{aligned} & 2i B_\rho \gamma^{\rho\nu} + 2i C_{\rho\sigma} (g^{\rho\nu} \gamma^\sigma - g^{\sigma\nu} \gamma^\rho) + 2i D^\nu \gamma^5 - 2i E \gamma^{\nu 5} = \\ & = -\gamma^\mu \partial_\mu \delta x^\nu + \frac{1}{4} \gamma^\nu \partial_\mu \delta x^\mu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \delta \lambda. \end{aligned}$$

Da die γ^μ und $\gamma^{\mu\nu}$ linear unabhängig sind, folgt daraus einerseits

$$(39) \quad B_\rho = D_\rho = E = 0,$$

andererseits

$$(40) \quad \gamma^\mu (2i(C_{\mu\nu} - C_{\nu\mu}) + \partial_\mu \delta x_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \partial_\rho \delta x^\rho + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta \lambda) = 0$$

und daraus unter Benutzung von (21)

$$(41) \quad C_{\mu\nu} = -\frac{i}{8} (\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu), \quad \delta \lambda = 0.$$

Gehen wir damit in die Gleichung (34) ein, so erhalten wir:

$$(42) \quad 2i \gamma^\mu \partial_\mu \gamma_\mu A - \frac{i}{4} \partial_\mu (\partial_\rho \delta x^\sigma - \partial_\sigma \delta x^\rho) (\gamma^\mu \gamma^{\rho\sigma} + \gamma^{\rho\sigma} \gamma^\mu) = 0,$$

oder unter Verwendung von (B.7)

$$(43) \quad 2i \gamma^\mu \partial_\mu \gamma_\mu A - \frac{i}{4} (\gamma_\sigma \gamma^{\rho\sigma} + \gamma^{\rho\sigma} \gamma_\sigma) \partial_\rho \partial_\tau \delta x^\tau = 0.$$

Auf Grund der Identität

$$(44) \quad \delta^\sigma \delta^{\rho\sigma} = -\delta^{\rho\sigma} \delta^\sigma$$

und weil die δ^μ linear unabhängig sind, folgt daraus

$$(45) \quad \partial_\mu \lambda_\mu A = 0$$

Die Gleichung (35) schließlich ergibt

$$(46) \quad 2 \operatorname{Re} A = -\frac{3}{4} \partial_\mu \delta x^\mu.$$

Damit ist δS eindeutig bestimmt bis auf den Imaginärteil von A , den wir vorläufig gleich Null setzen wollen; er entspricht einer willkürlichen Phasentransformation von ψ , auf die wir später noch genauer eingehen werden. Setzen wir nun aus (24) die zur konformen Gruppe gehörenden Werte der δx^μ in (41) und (46) ein und beachten (39), so erhalten wir für (37) endlich:

$$(47) \quad \delta S = -3 c_\sigma x^\sigma - \frac{3}{2} \varrho - \frac{i}{2} (c_\varrho x_\sigma - c_\sigma x_\varrho - \frac{1}{4} \omega_{\varrho\sigma} + \frac{1}{4} \omega_{\sigma\varrho}) \delta^{\rho\sigma}.$$

Wir stellen nun die zur konformen Gruppe gehörenden Erhaltungssätze zusammen. Dazu betrachten wir ihre Untergruppen:

1) die Translationen

$$(48) \quad \delta x^\mu = a^\mu, \quad \delta \varphi = \delta \psi = 0.$$

Ihnen entspricht als Erhaltungsgröße der Viererimpuls

$$(49) \quad \begin{aligned} P^\mu &= \int r^\mu d^3x = \\ &= \int (\partial^\mu \varphi \partial^\ell \varphi - \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi g^{\mu\ell} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\ell \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi) d\sigma_\ell \end{aligned}$$

mit den Komponenten Feldimpuls

$$(50) \quad \vec{p} = \int \vec{p} d^3x = \int (\dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi + \frac{i}{2} \varphi^* \vec{\nabla} \varphi) d^3x$$

und Feldenergie

$$(51) \quad E = \int \omega d^3x = \int \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + i \varphi^* \overleftrightarrow{\partial_t} \varphi) d^3x,$$

dabei ist $p^\mu = (\omega, \vec{p})$ die Impuls- bzw. Energiedichte.

Der Ausdruck für E läßt sich mittels der Feldgleichungen noch umformen; durch Elimination von $\dot{\varphi}$ und $\vec{\nabla} \varphi$ ergibt sich

$$(51') \quad E = \int \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + i \bar{\varphi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \varphi) d^3x + \int \varphi \bar{\varphi} \varphi d^3x.$$

Hier tritt der Wechselwirkungsterm aus der Lagrangedichte wieder auf. Die ersten Ableitungen von φ lassen sich nicht wegschaffen, da die Feldgleichung (6) von zweiter Ordnung ist.

2) die Lorentztransformationen

$$(52) \quad \delta x_\mu = \frac{1}{2} (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}) x^\nu; \delta \varphi = 0; \delta \varphi = \frac{i}{8} (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}) \gamma^{\mu\nu} \varphi$$

führen auf die Drehimpuls- und Schwerpunktsätze

$$(53) \quad M^{\rho\sigma} = \int \left(\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^\mu (x^\rho \overleftrightarrow{\partial}^\sigma - x^\sigma \overleftrightarrow{\partial}^\rho + i \gamma^{\rho\sigma}) \varphi + \right. \\ \left. + \partial^\mu \varphi (x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho) \varphi - \frac{1}{2} (x^\rho \gamma^{\mu\sigma} - x^\sigma \gamma^{\mu\rho}) \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi \right) d\sigma_\mu$$

oder auch

$$(54) \quad M^{\rho\sigma} = \int (x^\rho p^\sigma - x^\sigma p^\rho - \frac{1}{2} \varphi^* \gamma^{\rho\sigma} \varphi) d^3x.$$

Man sieht sofort die Zerlegung in Bahndrehimpuls und Spin. Daß sich diese Zerfällung hier unmittelbar ergibt, liegt an unserer speziellen Wahl (2) der Lagrangedichte (vgl. dazu (79)). Das negative Vorzeichen beim Spinterm rührt von unserer Wahl der Metrik her. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $M^{\rho\sigma}$ gegen Skalentransformationen invariant ist.

3) die Dilatationen

$$(55) \quad \delta x_\mu = \varepsilon x_\mu; \delta \varphi = -\varepsilon \varphi; \delta \psi = -\frac{3}{2} \varepsilon \psi$$

ergeben als Erhaltungsgröße

$$(56) \quad D = \int \left((\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi g^{\mu\ell} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\ell \psi) x_\ell + \varphi \partial^\mu \varphi \right) d^3x$$

oder

$$(57) \quad D = \int (x_\nu \dot{p}^\nu + \varphi \dot{\varphi}) d^3x = \int (\omega t - \mathbf{x} \cdot \vec{p} + \varphi \dot{\varphi}) d^3x.$$

4) die Beschleunigungstransformationen

$$(58) \quad \begin{aligned} \delta x_\mu &= 2c_\nu x^\nu x_\mu - c_\mu x^\nu x_\nu; \delta \varphi = -2c_\nu x^\nu \varphi; \\ \delta \psi &= -3c_\mu x^\mu \psi - \frac{i}{2} (c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu) \gamma^{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

Führen auf die Größen

$$(59) \quad \begin{aligned} K^\lambda &= \int \left((2x^\lambda x_\mu - \delta_\mu^\lambda x^\rho x_\rho) (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} g^{\mu\ell} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\ell \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi) + \right. \\ &\quad \left. + 2x^\lambda \varphi \partial^\ell \varphi - x_\rho \bar{\psi} (\gamma^{\lambda\rho} \gamma^\ell - \gamma^{\ell\rho} \gamma^\lambda) \psi + g^{\ell\lambda} \varphi^2 \right) d^3x \end{aligned}$$

oder nach einigen Umformungen

$$(60) \quad \vec{K} = \int (2\mathbf{x}(\omega t - \mathbf{x} \cdot \vec{p}) - (t^2 - \mathbf{x}^2) \vec{p} + 2\mathbf{x} \varphi \dot{\varphi} + \mathbf{x} \times (\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi)) d^3x$$

und

$$(61) \quad K^0 = \int (\omega(t^2 + \mathbf{x}^2) - 2t \mathbf{x} \cdot \vec{p} + 2t \varphi \dot{\varphi} + \varphi^2) d^3x.$$

Da die realistische Physik wegen der Existenz endlicher Ruhmassen nicht invariant ist unter Dilatationen und Beschleunigungstransformationen (63), scheinen auch die diesen Symmetrioperationen zugeordneten Erhaltungsgrößen D und K^μ keine unmittelbar anschauliche Interpretation zu besitzen (71).

Bisher haben wir nur diejenigen konformen Transformationen betrachtet, die sich stetig an die Identität anschließen. Um die diskreten konformen Transformationen einfacher diskutieren zu können, wenden wir uns kurz solchen Transformationen zu, die nur die Feldgrößen linear transformieren, während sie die Koordinaten unverändert lassen. Wegen

$$(62) \quad \partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad \left\| \frac{\partial x}{\partial x} \right\| = 1$$

erhalten wir aus (14), (27) und (29)

$$(63) \quad T^2 = \lambda,$$

$$(64) \quad S'^{-1} \delta^\mu S = T \delta^\mu,$$

$$(65) \quad \delta^0 S^+ \delta^0 S = T \cdot 1.$$

Aus (64) folgt weiter

$$(66) \quad \det(T \cdot 1) = T^4 = 1$$

und daraus, weil T reell ist,

$$(67) \quad T^2 = \lambda = 1, \quad T = \pm 1.$$

Wählen wir zunächst $T = +1$, so muß nach (64) S' proportional zur Einheitsmatrix sein; (65) liefert

$$(68) \quad |S|^2 = 1$$

oder

$$(69) \quad \varphi' = \varphi, \quad \psi' = e^{i\beta} \psi.$$

Dies sind die bereits weiter oben erwähnten speziellen Eichtransformationen, deren Diskussion wir noch etwas zurückstellen wollen.

Wählen wir dagegen $T = -1$, so muß S' proportional zu γ^5 sein; der Proportionalitätsfaktor läßt sich durch Abspalten

seiner Phasentransformation zu Eins machen. So ergibt sich die diskrete Transformation

$$(70) \quad x'^{\mu} = x^{\mu}, \varphi' = -\varphi, \psi' = \gamma^5 \psi.$$

Sie ist eine spezielle TOUSCHEK-Transformation; gegen die volle TOUSCHEK-Gruppe (75) ist unser System nicht invariant außer im Sonderfall $\varphi = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen suchen wir nun die diskreten Invarianzoperationen auf, die durch Koordinatentransformationen induziert werden. Dabei ist wesentlich, daß unsere Feldgrößen φ und ψ klassische Größen sind, keine Operatoren; infolgedessen ist hier beispielsweise die Ladungskonjugation C eine antilineare Transformation im Gegensatz zu den Verhältnissen in der Quantenfeldtheorie.

Als erstes betrachten wir die Raumspiegelung P :

$$(71) \quad x \rightarrow -x, t \rightarrow t.$$

Für sie gilt:

$$(72) \quad \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| = -1.$$

Damit erhalten wir aus (14):

$$(73) \quad \lambda = -T^2.$$

(27) und (29) liefern nach einigen Umformungen:

$$(74) \quad \gamma^0 S^+ \gamma^0 = T S^{-1},$$

$$(75) \quad S^{-1} \vec{\gamma} S = -T \vec{\gamma},$$

$$(76) \quad S^{-1} \gamma^0 S = +T \gamma^0.$$

Wie oben kann man schließen, daß $T^2 = 1$ sein muß; auf Grund von (70) kann man $T = 1$ annehmen. Dann muß S mit γ^0 vertauschbar mit $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ aber antivertauschbar sein; daraus folgt bis auf eine Phasentransformation:

$$(77) \quad S = \gamma^0$$

oder insgesamt

$$(78) \quad P: \quad \varphi(t, x) \rightarrow \varphi(t, -x); \quad \psi(t, x) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -x).$$

Es ist bemerkenswert, daß wir infolge der Invarianz (70) mit derselben Lagrangedichte auch ein pseudoskalaras φ -Feld beschreiben können, indem wir die Raumspiegelung anstelle von (78) darstellen durch

$$(78') \quad P': \quad \varphi(t, x) \rightarrow -\varphi(t, -x); \quad \psi(t, x) \rightarrow \gamma^0 \gamma^5 \psi(t, -x).$$

Anstelle von T , der Zeitumkehr, untersuchen wir die Kombination PT , die alle Koordinaten umkehrt:

$$(79) \quad PT: \quad x^\mu \rightarrow -x^\mu.$$

Hier erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$(80) \quad \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = T S^{-1},$$

$$(81) \quad S^{-1} \gamma^\nu S = -T \gamma^\nu.$$

Diese Gleichungen sind unerfüllbar; denn wählen wir beispielsweise $T = -1$, (wegen (70) läßt sich $T = +1$ hierauf zurückführen), so muß S zur Einheitsmatrix proportional sein; (80) liefert dann

$$(82) \quad |S|^2 = -1,$$

was nicht geht.

Es zeigt sich also, daß sich PT und damit wegen (78) auch die Zeitumkehr T selbst durch keine lineare Transformation der Feldgrößen darstellen läßt.

Damit sind alle linearen Symmetrietransformationen unserer Feldgrößen besprochen; auf der Suche nach weiteren Invarianzen wenden wir uns nun solchen Transformationen zu, die ψ linear, $\bar{\psi}$ aber antilinear transformieren (da ψ reell ist, fallen Antilinearität und Linearität für ψ zusammen). Es genügt, eine einzige antilineare Symmetrieeoperation zu finden, weil wir dann jede andere antilineare auf eine lineare Transformation und damit auf die bisher behandelten Fälle zurückführen können.

In Analogie zur Diracgleichung führen wir den zu ψ ladungsgespiegelten Spinor ψ^c ein:

$$(83) \quad \psi^c = B \psi^*,$$

dabei bedeutet B eine konstante 4x4-Matrix, die durch die Bedingungen

$$(84) \quad \gamma^{\mu *} = -B^{-1} \gamma^{\mu} B$$

bis auf einen komplexen Faktor bestimmt ist, und für die weiterhin gilt (72):

$$(85) \quad B = B^T, \quad B^* = B^+ = B^{-1}.$$

Damit ist

$$(86) \quad \psi^{cc} = B(B\psi^*)^* = BB^*\psi = \psi,$$

außerdem gilt

$$(87) \quad \gamma^{\mu T} = -B^{-1} \gamma^{\mu} B$$

oder wegen $\gamma^0 + = \gamma^0$, $\vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma}$:

$$(88) \quad \gamma^{0T} = -B^{-1} \gamma^0 B, \quad \vec{\gamma}^T = +B^{-1} \vec{\gamma} B.$$

Wir machen nun für die Kombination PCT den Ansatz:

$$(89) \quad \varphi'(x^M) = T \varphi(-x^M); \quad \psi'(x^M) = S \psi^c(-x^M).$$

Gleichung (14) bleibt gültig; aus ihr folgt

$$(90) \quad \lambda = T^2,$$

Für das Wechselwirkungsglied bekommen wir:

$$(91) \quad \mathcal{O} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (S \psi^c)^+ \gamma^0 S \psi^c T \varphi d^4x - \lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi} \psi \varphi d^4x$$

oder, da jeder Skalar mit seinem Transponierten identisch ist:

$$(92) \quad \begin{aligned} \mathcal{O} &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\bar{\psi} \gamma^0 B^T S^T \gamma^0 T S^* B^* \psi T \varphi - T^2 \bar{\psi} \psi \varphi) d^4x = \\ &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi} (-\gamma^0 B S^T B^{-1} \gamma^0 B S^* B^{-1} - T) T \psi \varphi d^4x. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$(93) \quad \tilde{S} = B S^* B^{-1}$$

folgt daraus

$$(94) \quad \gamma^0 \tilde{S}^+ \gamma^0 \tilde{S} = -T,$$

Ebenso ergibt das von ψ allein abhängende Glied nach einigen Umformungen:

$$(95) \quad \tilde{S}^{-1} \gamma^\nu \tilde{S} = -T \gamma^\nu,$$

Setzen wir hier $T = -1$, so muß $\tilde{S}$ proportional zur Einheitsmatrix sein, und aus (94) und (93) folgt bis auf eine Phasentransformation:

$$(96) \quad \tilde{S} = S = 1,$$

Den Fall $T = +1$ erhalten wir daraus mittels der Transformation (70).

So bekommen wir für die Operation PCT die folgende antilinear Darstellung:

$$(97) \quad PCT: \varphi(x^\mu) \rightarrow \varphi(-x^\mu); \psi(x^\mu) \rightarrow \gamma^5 \psi^c(-x^\mu).$$

Es ist bemerkenswert, daß wir PCT-Invarianz erhalten haben, obgleich wir mit klassischen, vertauschbaren Feldgrößen rechnen, sodaß die Voraussetzungen für das Lüderstheorem (80), (81) nicht erfüllt sind.

Für $CT = P \cdot PCT$ erhalten wir mit (78):

$$(97') \quad CT: \varphi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi(-t, \mathbf{x}); \psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \gamma^5 \psi^c(-t, \mathbf{x}).$$

Gegen die Ladungskonjugation C , definiert durch (83), ist unser System nicht invariant; es kann auch keine andere antilinear Darstellung für C geben, da sich sonst $T = C \cdot CT$ linear darstellen lassen müßte, was aber, wie wir oben gezeigt haben, nicht möglich ist.

Auf der Suche nach weiteren Invarianzen gehen wir nun zu noch allgemeineren Transformationen der Feldgrößen über, nämlich solchen, die aus linearen und antilinearen zusammengesetzt sind. Dabei halten wir die Koordinaten fest. Wir setzen

$$(98) \quad \varphi' = T \varphi; \psi' = S_1 \psi + S_2 \psi^c; W' = \lambda W.$$

T ist wieder eine reelle Konstante, S_1 und S_2 sind konstante nichtsinguläre komplexe 4×4 -Matrizen. Das von φ allein abhängige Glied in W gibt wie oben:

$$(99) \quad \lambda = T^2.$$

Das Wechselwirkungsglied in W liefert:

$$(100) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\psi^\dagger S_1^\dagger + \psi^c S_2^\dagger) \gamma^0 (S_1 \psi + S_2 \psi^c) T \varphi d^4x - T^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\psi} \psi \varphi d^4x = 0.$$

oder nach einigen Umformungen

$$(101) \quad \begin{aligned} & T \int_{\Sigma_1} \bar{\psi} (\gamma^0 S_1^+ \gamma^0 S_1 + \gamma^0 B^T S_2^T \gamma^0 S_2^* B^* - T) \psi d^4x + \\ & + T \int_{\Sigma_1} \psi^T B^+ S_2^+ \gamma^0 S_1 \psi d^4x + T \int_{\Sigma_1} \psi^+ S_1^+ \gamma^0 S_2^* B \psi^* d^4x = 0. \end{aligned}$$

Die drei Summanden verhalten sich bei Phasentransformationen verschieden, müssen also einzeln verschwinden. Da die beiden letzten Integrale zueinander komplex konjugiert sind, erhalten wir nur zwei Bedingungen:

$$(102) \quad \gamma^0 S_1^+ \gamma^0 S_1 + \gamma^0 B^T S_2^T \gamma^0 S_2^* B^* - T = 0,$$

$$(103) \quad B^+ S_2^+ \gamma^0 S_1 + (B^+ S_2^+ \gamma^0 S_1)^T = 0.$$

Der von ψ allein abhängige Teil von $W' - 2W$:

$$(104) \quad \int_{\Sigma_1} (\psi^+ S_1^+ + \psi^+ S_2^+) \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu (S_1 \psi + S_2 \psi^c) d^4x - T^2 \int_{\Sigma_1} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi d^4x = 0$$

oder umgeformt

$$(105) \quad \begin{aligned} & \int_{\Sigma_1} \bar{\psi} (\gamma^0 S_1^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_1 - \gamma^0 B^T S_2^T \gamma^\mu \gamma^0 S_2^* B^* - T^2 \gamma^\mu) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi d^4x + \\ & + \int_{\Sigma_1} \psi^T B^+ S_2^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi d^4x + \int_{\Sigma_1} \psi^+ S_1^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_2^* B \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi^* d^4x = 0 \end{aligned}$$

liefert schließlich die Bedingungen

$$(106) \quad \gamma^0 S_1^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_1 - \gamma^0 B^T S_2^T \gamma^\mu \gamma^0 S_2^* B^* - T^2 \gamma^\mu = 0$$

und

$$(107) \quad (B^+ S_2^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_1) - (B^+ S_2^+ \gamma^0 \gamma^\mu S_1)^T = 0$$

Formen wir (103) und (107) um, so erhalten wir

$$(108) \quad B S_1^{T-1} B^+ S_2^+ \gamma^0 - \gamma^0 B S_2^* B^* S_1^{-1} = 0$$

sowie

$$(109) \quad B S_1^{T-1} B S_2^+ \gamma^0 \gamma^\mu - \gamma^0 \gamma^\mu B S_2^* B^* S_1 = 0.$$

Setzen wir (108) in (109) ein, so ergibt sich

$$(110) \quad (B S_2^* B^* S_1^{-1}) \gamma^\wedge - \gamma^\wedge (B S_2^* B^* S_1^{-1}) = 0.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist vertauschbar mit allen $\gamma^\wedge$, somit mit der ganzen γ -Algebra; er muß also ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein. Damit haben wir

$$(111) \quad S_2 = c \cdot B S_1^* B^{-1},$$

wo c ein komplexer Skalar ist.

(103) und (107) sind durch (111) identisch erfüllt; aus (102) und (106) erhalten wir

$$(112) \quad (1 - |c|^2) \gamma^0 S_1 + \gamma^0 S_1 - T = 0$$

und

$$(113) \quad (1 - |c|^2) \gamma^0 S_1 + \gamma^0 \gamma^\wedge S_1 - T^2 \gamma^\wedge = 0.$$

Einsetzen von (112) in (113) ergibt

$$(114) \quad \gamma^\wedge S_1 = T S_1 \gamma^\wedge.$$

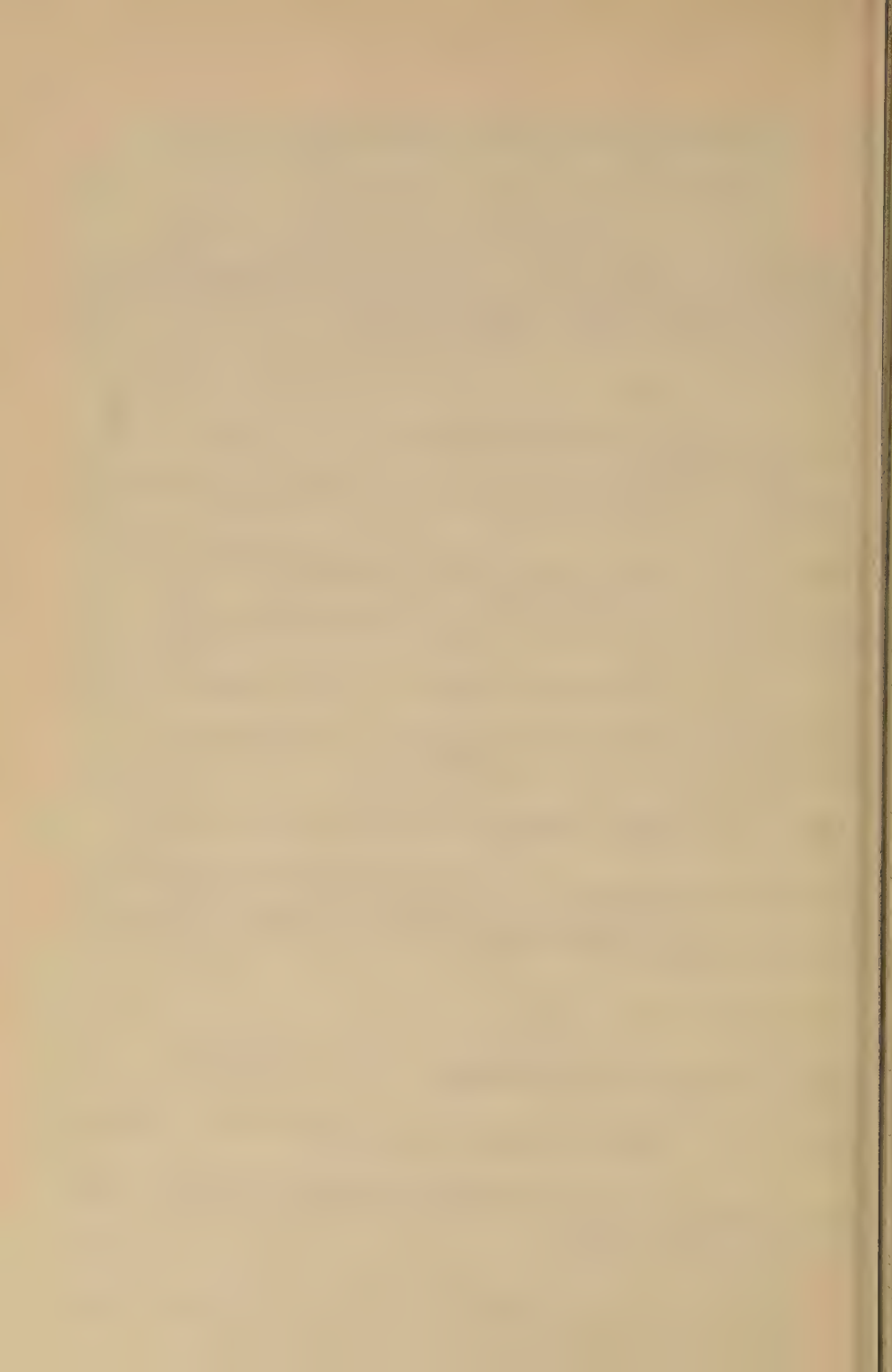
T muß den Betrag Eins haben; wegen (69) und (70) genügt es, $T = +1$ zu betrachten. Dann muß S_1 proportional zur Einheitsmatrix sein und aus (111) folgt

$$(115) \quad c = \frac{S_2}{S_1^*}.$$

(112) ergibt damit die Bedingung

$$(116) \quad |S_1|^2 - |S_2|^2 - 1 = 0$$

für die komplexen Zahlen S_1 und S_2 . Damit sind die Transformationen (98) bestimmt.



die gegen Phasentransformationen nicht invariant ist; physikalische Bedeutung dürfte demnach nur ihrem Absolutbetrag zukommen.

Durch die Ansätze (11), (89), (98) ist es uns gelungen, eine Reihe von Symmetrioperationen und Erhaltungssätzen für unser Gleichungssystem (4) - (6) zu finden. Für eine weitere Verallgemeinerung bestehen noch folgende Möglichkeiten:

erstens kann man in (98) zulassen, daß sich die Koordinaten ändern;

zweitens kann man allgemeinere Kombinationen der Feldgrößen zulassen, die nicht mehr homogen von erstem Grade sind.

Wir werden dieses Programm nicht weiter verfolgen, zumal wir mit dem Ansatz (98) schon den Rahmen der üblicherweise allein betrachteten linearen Transformationen verlassen haben; wir wollen nur noch beweisen, daß man auch mit dem zu (98) analogen Ansatz

$$(123) \quad T': \varphi \rightarrow \varphi(-t, \mathbf{r}), \quad \varphi^c \rightarrow S_2^* B^{-1} \varphi(-t, \mathbf{r}) + B S_1^* B^{-1} \varphi^c(-t, \mathbf{r}),$$

die Zeitumkehr T nicht darstellen kann.

Der Beweis ist einfach; wenn etwa (123) eine Symmetrioperation ist, so muß auch die Kombination (vgl. (97'))

$$(124) \quad C T \cdot T': \varphi \rightarrow \varphi, \quad \varphi^c \rightarrow -\gamma^0 \gamma^5 S_1 \varphi - \gamma^0 \gamma^5 S_2 \varphi^c,$$

eine Symmetrioperation und, weil sie die Koordinaten fest läßt, (bis auf eine Spiegelung (70)) ein Element g von (117) sein. Daraus folgt aber sofort

$$(125) \quad T' = T \cdot C \cdot g,$$

d.h. wir erhalten auch durch den Ansatz (123) nur die Kombination CT .

Beim Übergang zu einer quantisierten Theorie müssen wir beachten, daß wir bei der Ableitung der antilinearen Transformationen die Vertauschbarkeit der ψ und $\bar{\psi}$ vorausgesetzt haben. Daß sich beim Übergang zur Antivertauschbarkeit die Gruppenstruktur ändert, sieht man schon daran, daß das quantisierte Neutrino-feld, das wir erhalten, wenn wir in (2) die φ enthaltenden Terme streichen, nicht unter (117), dafür aber unter der Pauli-Gürsey-Gruppe $\langle 73 \rangle, \langle 74 \rangle$ und der Tauschek-Gruppe $\langle 75 \rangle$ invariant ist. Es ist wahrscheinlich, daß es eine zu (2) analoge Lagrangedichte gibt, die im Falle antivertauschbarer Spinoren die Pauli-Gürsey- und Tauschek-Invarianz sowie Konforminvarianz besitzt. Doch sollen diese Fragen hier nicht weiter untersucht werden, da wir uns im folgenden auf die unquantisierte Theorie beschränken wollen.

Wir werden im folgenden, bei der Ableitung spezieller Lösungen, weder von der inneren Invarianzgruppe noch von der Vertauschbarkeit der Spinoren Gebrauch machen. Daraus ergibt sich, daß alle weiteren Ergebnisse auch für den vielleicht realistischeren Fall antivertauschbarer Spinorgrößen unverändert gelten.

III. Spezielle Lösungen: Teil 1

Im folgenden greifen wir aus der großen Lösungsmannigfaltigkeit der Gleichungen (II.4-6) spezielle Lösungsklassen heraus, die sich durch besondere Symmetrien auszeichnen. Als Invarianzgruppen bieten sich unter anderen an:

- a) die Raum- und Zeittranslationen
- b) die räumlichen Drehungen und die Zeittranslationen
- c) die homogene Lorentzgruppe
- d) die Dilatationen.

Wir behandeln im folgenden nur a) und b).

Dabei läßt sich im allgemeinen nur erreichen, daß φ und $\bar{\varphi}$ die betreffende Symmetrie besitzen, während beliebige bilineare Ausdrücke $\bar{\varphi} \Gamma \varphi$ mit einer konstanten 4x4-Matrix Γ , ebenso wie schon in der Diracschen Theorie des Wasserstoffatoms, nicht mehr voll symmetrisch sind; d.h. es tritt in der Regel Entartung ein.

1) Konstante Felder

Um später lästigen Fallunterscheidungen aus dem Wege zu gehen, behandeln wir zuerst die Lösungen von (II.4-6) mit konstanten Feldgrößen φ und ψ . Dann lauten die Feldgleichungen:

$$(1) \quad \varphi \psi = 0, \quad \varphi \bar{\psi} = 0,$$

$$(2) \quad \bar{\varphi} \psi = 0.$$

Für $\varphi \neq 0$ sind die ersten beiden Gleichungen nur erfüllbar durch $\psi = \bar{\psi} = 0$.

Für $\varphi = 0$ betrachten wir die stets mögliche Zerlegung

$$(3) \quad \psi = \frac{1 + \gamma^0}{2} \psi_1 + \frac{1 - \gamma^0}{2} \psi_2,$$

dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen:

$$(4) \quad \frac{1 + \gamma^0}{2} \psi_1 = \psi_1, \quad \frac{1 - \gamma^0}{2} \psi_2 = \psi_2.$$

Dann gilt

$$(5) \quad \bar{\psi}\psi = \psi_1^+ \frac{1+\gamma^0}{2} \psi_1 - \psi_2^+ \frac{1-\gamma^0}{2} \psi_2 = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2,$$

(2) ist also erfüllt, sobald ψ_1 und ψ_2 dieselbe Länge haben.

Im folgenden werden wir die Lösungen $\psi = \text{const.}$ gewöhnlich außer Acht lassen, auch ohne jedesmal ausdrücklich darauf hinzuweisen.

2) Translationsinvariante Lösungen mit $\varphi = 0$

Wir verlangen, daß φ und $\bar{\psi}\psi$ translationsinvariant, also konstant sind; dann folgt aus (II.6) sofort

$$(6) \quad \bar{\psi}\psi = 0.$$

(II.4) stimmt, da φ konstant ist, mit der Diracgleichung überein. Es gilt also, solche Lösungen der Diracgleichung zu finden, die der Nebenbedingung (6) genügen.

Betrachten wir zuerst den "Neutrino-fall" $\varphi = 0$, so geht (II.4) über in

$$(7) \quad -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0.$$

Für die "zweikomponentigen" Lösungen

$$(8) \quad \psi_\pm = \frac{1 \pm i\gamma^5}{2} \psi$$

gilt einerseits

$$(9) \quad -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\pm = 0,$$

andererseits

$$(10) \quad \gamma^5 \psi_\pm = \mp i \psi_\pm, \quad \bar{\psi}_\pm \gamma^5 = \pm i \bar{\psi}_\pm,$$

und damit

$$(11) \quad \bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm} = \pm i \bar{\psi}_{\pm} (\gamma^5 \psi_{\pm}) = \pm i (\pm i \bar{\psi}_{\pm}) \psi_{\pm} = -\bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm}$$

oder

$$(12) \quad \bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm} = 0.$$

Alle zweikomponentigen Neutrino-Wellenfunktionen sind also Lösungen von (II.4-6) mit

$$(13) \quad \psi = \bar{\psi} \psi = 0.$$

Es kann auch für eine Überlagerung von Neutrino- und Anti-neutrino-Wellen die Bedingung (6) erfüllt sein, nämlich dann, wenn alle vorkommenden Wellenvektoren zu einem festen Vierervektor k_{μ} parallel sind, d.h. wenn alle Phasengeschwindigkeiten nach Betrag und Richtung gleich sind. Dann folgt aus (7)

$$(14) \quad \gamma^{\mu} k_{\mu} \psi = 0, \quad \bar{\psi} \gamma^{\mu} k_{\mu} = 0.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$(15) \quad \bar{\psi} \gamma^{\mu} k_{\mu} \gamma^0 \psi + \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^{\mu} k_{\mu} \psi = 0$$

oder

$$(16) \quad 2k^0 \bar{\psi} \psi = 0.$$

Wegen der aus (14) folgenden Gleichung

$$(17) \quad k^{\mu} k_{\mu} = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = 0$$

kann k^0 nicht verschwinden, also ist (6) erfüllt.

Nehmen wir speziell eine ebene Welle an durch

$$(18) \quad \psi = e^{ik^{\mu} x_{\mu}} \chi, \quad k^{\mu} k_{\mu} = 0,$$

so sind alle bilinearen Ausdrücke $\bar{\psi} \Gamma \psi$ Konstanten, was, wie wir oben schon bemerkt haben, im allgemeinen Fall nicht zuzutreffen braucht.

3) Translationsinvariante Lösungen mit $\varphi \neq 0$

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse für $\varphi \neq 0$. Hier gibt es überhaupt keine Lösungen, für die alle $\bar{\psi} \Gamma \psi$ orts- und zeitunabhängig sind. Dies läßt sich wie folgt einsehen:

Wir betrachten eine Darstellung der γ -Algebra durch 4x4-Matrizen und wählen Γ so, daß die Matrix $\gamma^0 \Gamma$ überall ausser an der Stelle (i, k) Nullen stehen hat. Dann gilt

$$(19) \quad \bar{\psi} \Gamma \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \Gamma \psi = \psi_i^* \psi_k,$$

wo ψ_k die k -te Komponente des Viererspinors ψ bedeutet. Da alle Funktionen $\bar{\psi} \Gamma \psi$ konstant sein sollen, gilt speziell:

$$(20) \quad \frac{\psi_i^* \psi_k}{\psi_i^* \psi_l} = \frac{\psi_k}{\psi_l} = \text{const.}$$

oder

$$(21) \quad \psi = f(x_\mu) \cdot \psi_0$$

mit einem konstanten Spinor ψ_0 .

Auf Grund von

$$(22) \quad \bar{\psi} \Gamma \psi = \bar{\psi}_0 \Gamma \psi_0 \cdot |f(x_\mu)|^2 = \text{const.}$$

kann man schreiben:

$$(23) \quad f(x_\mu) = f_0 e^{i g(x_\mu)}$$

mit reellem $g(x_\mu)$ und konstantem f_0 , das man noch mit in das oben eingeführte ψ_0 stecken kann.

ψ muß folglich die Form haben:

$$(24) \quad \psi = \psi_0 e^{i g(x_\mu)}$$

Nun greifen wir auf unsere Feldgleichungen zurück. Aus (II.4,5) ergibt sich

$$(25) \quad (\gamma^\mu \partial_\mu g + \varphi) \psi_0 = 0, \quad \bar{\psi}_0 (\gamma^\mu \partial_\mu g + \varphi) = 0$$

Daraus folgt

$$(26) \quad \bar{\psi}_0 (\gamma^0 (\gamma^\mu \partial_\mu g + \varphi) + (\gamma^\mu \partial_\mu g + \varphi) \gamma^0) \psi = 0$$

oder

$$(27) \quad \partial^0 g \cdot \bar{\psi}_0 \psi_0 + \varphi \psi_0^\dagger \psi_0 = 0.$$

Wegen (6) und $\varphi \neq 0$ ergibt sich somit

$$(28) \quad \psi_0^\dagger \psi_0 = 0$$

oder $\psi = 0$, was zu beweisen war.

Es ist also insbesondere nicht möglich, die Feldgleichungen für $\varphi \neq 0$ durch ebene Wellen zu befriedigen, die ja die Form (24) haben. Versuchen wir, ψ durch eine Überlagerung von zwei ebenen Wellen

$$(29) \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = e^{i k_1^\mu x_\mu} \chi_1 + e^{i k_2^\mu x_\mu} \chi_2$$

darzustellen, so erhalten wir aus (II.4)

$$(30) \quad (k_1^\mu \gamma_\mu + \varphi) e^{i k_1^\mu x_\mu} \chi_1 + (k_2^\mu \gamma_\mu + \varphi) e^{i k_2^\mu x_\mu} \chi_2 = 0.$$

Diese Gleichung soll identisch in x_μ erfüllt sein; da nicht alle k_1^μ gleich k_2^μ sein sollen (sonst hätten wir den oben behandelten Fall), muß gelten:

$$(31) \quad (k_1^\mu \gamma_\mu + \varphi) \chi_1 = (k_2^\mu \gamma_\mu + \varphi) \chi_2 = 0,$$

daher auch

$$(32) \quad \bar{\chi}_1 (\hat{k}_1 \gamma_\mu + \varphi) = \bar{\chi}_2 (\hat{k}_2 \gamma_\mu + \varphi) = 0.$$

Aus (6) folgt jetzt

$$(33) \quad \begin{aligned} & \bar{\chi}_1 \chi_1 + \bar{\chi}_2 \chi_2 + \\ & + \bar{\chi}_1 \chi_2 e^{i(\hat{k}_2 - \hat{k}_1) x_\mu} + \bar{\chi}_2 \chi_1 e^{-i(\hat{k}_2 - \hat{k}_1) x_\mu} = 0. \end{aligned}$$

Damit dies identisch in x_μ gilt, muß sein:

$$(34) \quad \bar{\chi}_1 \chi_1 + \bar{\chi}_2 \chi_2 = 0$$

und

$$(35) \quad \bar{\chi}_2 \chi_1 = 0.$$

Wie oben bei (27) folgt aus (34)

$$(36) \quad k_1^0 \chi_2^+ \chi_2 + k_2^0 \chi_1^+ \chi_1 = 0;$$

damit dies erfüllbar ist, müssen k_1^0 und k_2^0 verschiedenes Vorzeichen haben, d.h. man muß ein Elektron und ein Positron kombinieren. Der einfachste Fall ist

$$(37) \quad k_1^1 + k_2^1 = 0;$$

dann ergibt sich aus (31) und (32)

$$(38) \quad 0 = \bar{\chi}_2 (\hat{k}_2 \gamma_\mu + \varphi) \chi_1 + \bar{\chi}_1 (\hat{k}_1 \gamma_\mu + \varphi) \chi_2 = 2\varphi \bar{\chi}_2 \chi_1.$$

(35) ist also erfüllt; (34) liefert mit (36)

$$(39) \quad \chi_1^+ \chi_1 = \chi_2^+ \chi_2,$$

was sich durch Wahl eines konstanten Amplitudenfaktors stets erreichen läßt.

Unsere Lösung setzt sich zusammen aus einer Elektronenwelle und einer dazu parallel laufenden Positronenwelle von gleicher Amplitude. Allerdings bilden sie keinen gebundenen Zustand; einmal ist wegen (6) und (II.51') die Wechselwirkungsenergie Null, zum anderen haben wir es nicht mit dem Produkt, sondern einer additiven Überlagerung von Elektron- und Positronamplituden ψ_1 und ψ_2 zu tun, also mit einem Gemisch, so daß sich die Quantenzahlen Spin, Parität etc. nicht in einfacher Weise zusammensetzen. Infolgedessen genügt auch unsere Überlagerung wieder der Diracgleichung, nicht etwa den Proca- oder Maxwellgleichungen.

Auch im allgemeinen Fall, wenn (37) nicht erfüllt ist, läßt sich eine passende Überlagerung finden. Allerdings muß man dann neben der Amplitude auch noch die Spineinstellung anpassen, auf die es im obigen Fall nicht ankam.

Es sei also

$$(40) \quad k_1^0 \cdot k_2^0 < 0,$$

außerdem soll (37) nicht erfüllt sein. Dann ist der Vierervektor $k_1^\mu - k_2^\mu$ sicher zeitartig. Legt man nun durch eine geeignete Lorentztransformation die Zeitachse zu diesem Vektor parallel, so ergibt sich im neuen Bezugssystem

$$(41) \quad \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}, \quad k_1^0 = -k_2^0 = E.$$

Wir gehen nun zu einer speziellen Darstellung der γ -Matrizen über:

$$(42) \quad \gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{vmatrix};$$

dabei bedeutet $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Paulischen Spinmatrizen. Ebenso zerlegen wir unsere Spinoren $\chi_{1,2}$ aus (29):

$$(43) \quad \chi_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

μ_i und ν_i sind hier konstante Zweierspinoren. Damit erhalten wir aus (31):

$$(44) \quad (\varphi + h_i^0) \mu_i - \vec{h}_i \cdot \vec{\sigma} \nu_i = 0,$$

$$(45) \quad \vec{h}_i \cdot \vec{\sigma} \mu_i + (\varphi - h_i^0) \nu_i = 0.$$

Unter der Bedingung

$$(46) \quad (h_i^0)^2 - |\vec{h}_i|^2 = \varphi^2$$

ergibt sich hieraus:

$$(47) \quad \mu_i = \vec{h}_i \cdot \vec{\sigma} w_i, \quad \nu_i = (\varphi + h_i^0) w_i$$

mit je einem konstanten Zweierspinor w_i , der nur noch die Spininformation enthält.

Die Bedingung (35) lautet jetzt

$$(48) \quad \mu_2^+ \mu_1 - \nu_2^+ \nu_1 = 0$$

oder mit (47) und (41)

$$(49) \quad w_2^+ (\vec{h} \cdot \vec{\sigma})^2 w_1 - w_2^+ (\varphi^2 - E^2) w_1 = 0,$$

also

$$(50) \quad |\vec{h}|^2 w_2^+ w_1 = 0.$$

w_2 ist also durch w_1 bis auf einen komplexen konstanten Faktor bestimmt, d.h. der Spin von ψ_2 ist durch den von ψ_1 vollständig festgelegt. Gleichung (34) liefert wegen

$$(51) \quad \bar{\chi}_i \chi_i = \mu_i^+ \mu_i - \nu_i^+ \nu_i = (\vec{h}_i)^2 w_i^+ w_i - (\varphi + h_i^0)^2 w_i^+ w_i$$

oder

$$(52) \quad \bar{\chi}_i \chi_i = -2\varphi(\varphi + h_i^0) w_i^+ w_i$$

Die Amplitudenbedingung

$$(53) \quad (E + \varphi) \omega_1^+ \omega_1 = (E - \varphi) \omega_2^+ \omega_2 ,$$

was sich offensichtlich immer erfüllen läßt.

Unsere Lösung (29) entspricht gemäß (34) der Überlagerung einer Elektronenwelle und einer dazu entgegengesetzt laufenden Positronenwelle gleicher Energie, deren Spineinstellung durch (50) festgelegt ist. Sei in unserem Bezugssystem speziell die Welle ψ_1 total longitudinal polarisiert, sei etwa

$$(54) \quad \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \psi_1 = S \psi_1 ,$$

$$(55) \quad S^2 = |\vec{k}|^2 ,$$

so muß auch ψ_2 vollständig, und zwar entgegengesetzt, polarisiert sein, also

$$(56) \quad \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \psi_2 = -S \psi_2 .$$

Diese einfache Zuordnung geht jedoch beim Übergang in ein anderes Bezugssystem im allgemeinen verloren.

4) Wechselwirkungsfreie Lösungen

Die bisher behandelten konstanten oder translationsinvarianten Lösungen von (II.4-6) sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, für die in der Wirkungsfunktion (II.1,2) und in der Feldenergie (II.51') das Wechselwirkungsglied verschwindet. Wir wollen noch weitere Lösungen mit dieser Eigenschaft bestimmen. Dazu fordern wir

$$(57) \quad \bar{\psi} \psi = 0 .$$

Daraus folgt wegen (II.6), daß φ Lösung der Wellengleichung sein muß:

(58)

$$\square \varphi = 0.$$

Wir setzen also für das weitere φ gleich einer beliebig gewählten Lösung von (58) und nehmen an, daß wir ein φ bestimmt haben, das die Gleichung (II.4)

(59)

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \varphi) \psi = 0$$

mit unserer ausgewählten Funktion φ befriedigt.

Um eine Lösung von (57) zu finden, beachten wir, daß mit einer Lösung χ auch die dazu ladungsgespiegelte Funktion χ^c (vgl. II.83-85) die Gleichung (59) erfüllt. Demnach ist auch eine Überlagerung

(60)

$$\psi = a\chi + b\chi^c$$

Lösung von (59); a und b bedeuten hier zwei skalare komplexe Konstanten.

Aus (60) folgt sofort

(61)

$$\bar{\psi}\psi = |a|^2 \bar{\chi}\chi + |b|^2 \bar{\chi}^c \chi^c + a^* b \bar{\chi}\chi^c + a b^* \bar{\chi}^c \chi.$$

Die beiden letzten Terme sind zueinander komplex konjugiert; mit der aus (II.88) folgenden Beziehung

(62)

$$B^T \gamma^{0T} = -\gamma^0 B$$

bekommen wir einerseits

(63)

$$\bar{\chi}^c \chi^c = \chi^T B^+ \gamma^0 B \chi^* = \chi^+ B^T \gamma^{0T} B^* \chi = -\bar{\chi}\chi,$$

andererseits

(64)

$$\bar{\chi}\chi^c = \chi^+ \gamma^0 B \chi^* = \chi^+ B^T \gamma^{0T} \chi^* = -\bar{\chi}^c \chi^c = 0$$

und somit

(65)

$$\bar{\psi}\psi = (|a|^2 - |b|^2) \bar{\chi}\chi.$$

Wir erhalten das Ergebnis:

Um eine wechselwirkungsfreie Lösung von (II.4-6) zu erhalten, wählen wir zuerst eine beliebige Lösung φ der Wellengleichung (58); mit diesem φ gehen wir in (59) ein und bestimmen eine partikuläre Lösung ψ . Eine Überlagerung (60), für die

$$(66) \quad |a| = |b|$$

gilt, erfüllt (57) und (II.4-6).

Das angegebene Verfahren funktioniert natürlich nur dann, wenn (59) mit dem ausgewählten φ wirklich lösbar ist; dies läßt sich nur jeweils im Einzelfall entscheiden. Ein durchgerechnetes Beispiel geben wir im Anhang E an.

IV. Spezielle Lösungen: Teil 2

Rotationssymmetrische Lösungen

Unter rotationssymmetrischen Lösungen von (II.4-6) wollen wir solche Lösungen verstehen, bei denen ψ und $\bar{\psi}\psi$ nur von r abhängen. Bei ψ selbst und den mit einer konstanten Matrix Γ gebildeten bilinearen Ausdrücken $\bar{\psi}\Gamma\psi$ müssen wir, wie in der Diractheorie, eine Winkel- und Zeitabhängigkeit zulassen.

1) Winkelseparation

Wir betrachten vorläufig die Gleichung (II.4)

$$(1) \quad D\psi \equiv (-i\gamma^\mu \partial_\mu + \varphi)\psi = 0$$

allein, wobei wir φ als eine fest gegebene Funktion von r ansehen wollen. Gleichung (1) ist eine Diracgleichung mit vom Radius abhängigem Massenterm; man überzeugt sich leicht, daß der Operator D in (1) vertauschbar ist mit den aus der Theorie des Wasserstoffatoms (76) bekannten hermiteschen Operatoren

$$(2) \quad p_0 = -i\partial_0,$$

$$(3) \quad J_3 = M_3 + \frac{1}{2}\sigma_3,$$

$$(4) \quad K = \gamma^0(\vec{M} \cdot \vec{\sigma} + 1).$$

Daher können wir die von SAUTER (82) angegebene Methode zur Behandlung der Diracgleichung mit zentralsymmetrischem Feld nahezu unverändert übernehmen. Wir nehmen an, daß ψ gemeinsame Eigenfunktion zu p_0 , J_3 und K ist mit den Eigenwerten ω , m und k . ω ist eine beliebige reelle Zahl; k hängt über

$$(5) \quad \vec{J}^2 = K^2 - \frac{1}{4}; \quad j = |k| - \frac{1}{2}$$

mit dem Gesamtdrehimpuls j zusammen (76), ist also positiv oder negativ ganzzahlig; der Wert Null scheidet dabei aus. Die magnetische Quantenzahl m ist halbzahlig und liegt zwischen $-j$ und

+ γ einschließlich. Wir verwenden im folgenden noch die Abkürzung

$$(6) \quad W = i \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}{r}, \quad W^2 = 1.$$

Damit erhalten wir analog wie in (82) für ψ den Ausdruck

$$(7) \quad \psi = (f(r) - W g(r)) e^{i(\omega t + \beta)} \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} - \epsilon_1 \sqrt{\frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \right) \Gamma.$$

Darin bedeuten die Y_l^m die normierten Kugelflächenfunktionen, deren genaue Definition wir im Anhang C geben. Γ ist ein konstanter Spinor, für den gilt

$$(8) \quad \frac{1 + \gamma^0}{2} \Gamma = \frac{1 + \epsilon_3}{2} \Gamma = \Gamma,$$

$$(9) \quad \Gamma^\dagger \Gamma = 1,$$

$e^{i\beta}$ ist ein willkürlicher Phasenfaktor. Die beiden reellen Radialfunktionen f und g bestimmen sich aus dem Differentialgleichungssystem

$$(10) \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1-k}{r} \right) f(r) + (\varphi(r) - \omega) g(r) = 0,$$

$$(11) \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1+k}{r} \right) g(r) + (\varphi(r) + \omega) f(r) = 0.$$

Setzt man in (7) noch einen Faktor $W^2 = 1$ ein, so erhält man (siehe Anhang C) die zu (5) analoge, gelegentlich günstigere Darstellung

$$(12) \quad \psi = (-1)^{m+\frac{1}{2}} (g(r) - W f(r)) e^{i(\omega t + \beta)} \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{k-m+\frac{1}{2}}{2k+1}} Y_{+k}^{m-\frac{1}{2}} - \epsilon_1 \sqrt{\frac{k+m+\frac{1}{2}}{2k+1}} Y_{+k}^{m+\frac{1}{2}} \right) \gamma_5 \Gamma.$$

Durch (7) bzw. (12) ist die Winkelabhängigkeit von ψ vollständig bestimmt, und zwar unabhängig von der Wahl von $\varphi(r)$.

2) Verhalten bei $\tau = 0$

Wir wollen nun die Anfangsbedingungen für (8) und (9) bestimmen; dazu ist es zweckmäßig, ψ in Komponenten zu zerlegen und als Basis die Eigenvektoren von γ^0 und σ_3 zu verwenden; bei dieser Basiswahl enthält jede Komponente von ψ nur eine einzige Kugelfunktion. Aus (7) lesen wir ab:

$$(13) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1+\gamma^0}{2} \frac{1+\sigma_3}{2} \psi = \\ &= f(r) e^{i(\omega t + \beta)} \sqrt{\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} \Gamma, \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1+\gamma^0}{2} \frac{1-\sigma_3}{2} \psi = \\ &= -f(r) e^{i(\omega t + \beta)} \sqrt{\frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \sigma_1 \Gamma \end{aligned}$$

Aus (12) erhalten wir entsprechend:

$$(15) \quad \begin{aligned} \psi_3 &= \frac{1-\gamma^0}{2} \frac{1+\sigma_3}{2} \psi = \\ &= (-1)^{m+\frac{1}{2}} g(r) e^{i(\omega t + \beta)} \sqrt{\frac{k-m+\frac{1}{2}}{2k+1}} Y_{+k}^{m-\frac{1}{2}} \gamma_5 \Gamma, \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \psi_4 &= \frac{1-\gamma^0}{2} \frac{1-\sigma_3}{2} \psi = \\ &= -(-1)^{m+\frac{1}{2}} g(r) e^{i(\omega t + \beta)} \sqrt{\frac{k+m+\frac{1}{2}}{2k+1}} Y_{+k}^{m+\frac{1}{2}} \gamma_5 \sigma_1 \Gamma. \end{aligned}$$

Wir verlangen, daß unsere Feldgrößen φ und ψ beschränkt sind und daß die Feldgleichungen überall gelten sollen. Dann muß ψ überall und insbesondere im Nullpunkt differenzierbar und damit stetig sein, d.h. der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0} \psi_i$ muß existieren und winkelunabhängig sein. Nun stehen in (13), (14), (15) und (16) vier verschiedenen Kugelfunktionen. Wegen $k \neq 0$ kann nur die eine konstante Kugelfunktion

$$(17) \quad Y_{-1}^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

auftreten, und zwar nur in den folgenden vier Fällen:

Fall a)

$$k = +1, m = +\frac{1}{2}:$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} f(r) e^{i(\omega t + \beta)} \Gamma,$$

$$\psi_2 = 0,$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} g(r) e^{i(\omega t + \beta)} \cos \vartheta \cdot \gamma_5 \Gamma,$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} g(r) e^{i(\omega t + \beta)} \sin \vartheta e^{i\varphi} \gamma_5 \sigma_1 \Gamma.$$

Damit $\psi(0)$ eindeutig ist, muß sein:

$$(19) \quad g(0) = 0.$$

Analog ergibt sich:

Fall b)

$$k = +1, m = -\frac{1}{2}:$$

$$(20) \quad g(0) = 0$$

Fall c)

$$k = -1, m = +\frac{1}{2}:$$

$$(21) \quad f(0) = 0.$$

Fall d)

$$k = -1, m = -\frac{1}{2}:$$

$$(22) \quad f(0) = 0.$$

Für $|k| \neq 1$ ist Stetigkeit im Ursprung nur zu erreichen durch

$$(23) \quad f(0) = g(0) = 0.$$

Wir wollen das Verhalten von f und g in der Nähe von $r = 0$ noch etwas näher untersuchen; dabei stellen wir die Frage nach der Existenz von Lösungen zu (10) und (11) vorläufig noch zurück, bis wir auch die Feldgleichung (II.6) zur Verfügung haben.

Wir machen von der Tatsache Gebrauch, daß die Gleichungen (II.4-5) (aber nicht II.6!) und damit auch (10) und (11) invariant sind unter der Transformation (II.83)

$$(24) \quad \psi \rightarrow \psi^c, \quad \psi^c \rightarrow \psi,$$

die hier lautet:

$$(25) \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad k \rightarrow -k, \quad f \rightarrow g, \quad g \rightarrow f.$$

Wir können uns also im folgenden auf

$$(26) \quad k > 0$$

beschränken.

Wenn wir annehmen, daß $\varphi(\tau)$ im Ursprung analytisch ist, (im Anhang D wird u.a. gezeigt, daß dies zutrifft), und den Fall $\varphi(0) + \omega = 0$ ausschließen, dann können wir $\varphi(\tau)$ durch $\varphi(0)$ ersetzen und für f und g einen Potenzreihenansatz machen. Beschränken wir uns auf die führenden Glieder, so erhalten wir

$$(27) \quad f(\tau) \simeq (2k+1) A \tau^{k-1},$$

$$(28) \quad g(\tau) \simeq -(\varphi_0 + \omega) A \tau^k.$$

wenn wir die am Ursprung beschränkte Lösung auswählen. Man sieht, daß (19) - (23) erfüllt sind.

Für $\varphi(0) + \omega = 0$ müssen wir in der Entwicklung von $\varphi(\tau)$ ein Glied mehr mitnehmen:

$$(29) \quad \varphi(\tau) \simeq -\omega + c \tau^m, \quad m > 0.$$

Damit erhalten wir:

$$(30) \quad f(\tau) \simeq (2k + m + 1) A \tau^{k-1},$$

$$(31) \quad g(\tau) \simeq -A c \tau^{k+m}$$

3) Verhalten für $r \rightarrow \infty$

Wir interessieren uns für solche Lösungen von (II.4-6), die Teilchencharakter haben, d.h. für die f und g nach außen schließlich stark abfallen und φ gegen eine Konstante φ_∞ geht. Für den Fall, daß solche Lösungen existieren, wollen wir ihr asymptotisches Verhalten abschätzen. Dazu eliminieren wir $g(r)$ aus (10) und (11). So erhalten wir

$$(32) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{\varphi'}{\varphi - \omega} \right) \frac{d}{dr} + \omega^2 - \varphi^2 - \frac{k(k-1)}{r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi - \omega} \right) f = 0.$$

Wenn wir $|\varphi_\infty| = |\omega|$ ausschließen und nur die asymptotisch führenden Glieder beibehalten, erhalten wir daraus

$$(33) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \omega^2 - \varphi_\infty^2 \right) f = 0$$

mit der Lösung

$$(34) \quad f = \frac{1}{r} (c_1 e^{i\lambda r} + c_2 e^{-i\lambda r})$$

wobei

$$(35) \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - \varphi_\infty^2}$$

gesetzt ist. Analog ergibt sich

$$(36) \quad g = i \frac{\omega + \varphi_\infty}{\lambda} \frac{1}{r} (c_1 e^{i\lambda r} - c_2 e^{-i\lambda r})$$

mit denselben Koeffizienten c_1 und c_2 .

Für die weitere Diskussion kommt es auf das Vorzeichen von λ^2 an. Ist nämlich

$$(37) \quad \lambda^2 > 0, \quad \omega^2 > \varphi_\infty^2,$$

was physikalisch einem Streuzustand entspricht, so sind die Exponenten in (34) und (36) rein imaginär; nach Umformung erhalten wir die Darstellung

$$(38) \quad f(r) \simeq A \sqrt{\omega - \varphi_{\infty}} \frac{1}{r} \cos(\lambda r - \delta),$$

$$(39) \quad g(r) \simeq -A \sqrt{\omega + \varphi_{\infty}} \frac{1}{r} \sin(\lambda r - \delta).$$

Hier sind A und δ noch zwei willkürliche Konstanten; f und g fallen nach außen wie $1/r$ ab.

Im anderen Fall

$$(40) \quad \lambda^2 < 0, \quad \omega^2 < \varphi_{\infty}^2,$$

also im Gebiet der "gebundenen Zustände", darf in (34) bzw. (36) nur der nach außen stark abfallende Term vorkommen. Mit

$$(41) \quad \mu = + \sqrt{\varphi_{\infty}^2 - \omega^2}$$

erhalten wir asymptotisch

$$(42) \quad f(r) \simeq A \sqrt{\varphi_{\infty} - \omega} \frac{1}{r} e^{-\mu r},$$

$$(43) \quad g(r) \simeq A \sqrt{\varphi_{\infty} + \omega} \frac{1}{r} e^{-\mu r},$$

mit der einen willkürlichen Konstanten A .

In dem oben ausgeschlossenen Fall

$$(44) \quad \varphi_{\infty}^2 = \omega^2$$

hängt das Verhalten von f und g von den nächsten Gliedern der asymptotischen Entwicklung von $\varphi(r)$ ab; wir werden diesen Fall nicht weiter diskutieren, da er nichts wesentlich Neues bringt und wir ihn später nicht benötigen.

Wir stellen fest, daß das asymptotische Verhalten von f und g im wesentlichen durch ω und φ_{∞} bestimmt wird; man kann leicht sehen, daß die asymptotischen Entwicklungen von Lösungen zu verschiedenen ω und φ_{∞} voneinander linear unabhängig sind, soweit sie nicht über die Spiegelung (25) miteinander zusammenhängen.

4) Winkelabhängigkeit von $\bar{\Psi}\Psi$

Bisher hatten wir die Funktion $\varphi(\tau)$ als gegeben angenommen und allgemeine Eigenschaften von Ψ mittels (II.4) abgeleitet. Nehmen wir nun (II.6) hinzu und beachten, daß φ von den Winkeln und der Zeit unabhängig sein soll, so erhalten wir die Bedingung

$$(45) \quad \bar{\Psi}\Psi = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d}{d\tau} \right) \varphi(\tau),$$

die u.a. zur Folge hat, daß $\bar{\Psi}\Psi$ von den Winkeln und der Zeit nicht abhängen darf. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit diese Forderung erfüllt werden kann.

In (7) bzw. (12) haben wir Lösungen von (1) bestimmt, die Eigenvektoren zu ρ_0 , $\vec{J}_3$ und K sind. Für eine solche Funktion φ erhalten wir aus (7)

$$(46) \quad \begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi &= (|f(\tau)|^2 - |g(\tau)|^2) \times \\ &\times \left(\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1} \left| Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} \right|^2 + \frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1} \left| Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \right|^2 \right), \end{aligned}$$

ebenso aus (12)

$$(47) \quad \begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi &= (|f(\tau)|^2 - |g(\tau)|^2) \times \\ &\times \left(\frac{k-m+\frac{1}{2}}{2k+1} \left| Y_{+k}^{m-\frac{1}{2}} \right|^2 + \frac{k+m+\frac{1}{2}}{2k+1} \left| Y_{+k}^{m+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Faktoren enthalten die ganze τ -Abhängigkeit, während die Winkelabhängigkeit in den zweiten Faktoren steckt, die außerdem auf Grund ihrer Herleitung miteinander übereinstimmen müssen. Mit der Abkürzung

$$(48) \quad G(k, m) = \left(\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1} \left| Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} \right|^2 + \frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1} \left| Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \right|^2 \right)$$

ergibt sich

$$(49) \quad \bar{\Psi}\Psi = (|f(\tau)|^2 - |g(\tau)|^2) \cdot G(k, m).$$

Für unsere speziellen Funktionen ψ ist $\bar{\psi}\psi$ zeitunabhängig; G ist auf Grund von (C.1-5) ein Polynom in $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ (die Abhängigkeit vom Azimutwinkel $\tilde{\varphi}$ hebt sich heraus), außerdem gilt

$$(50) \quad G(k, -m) = G(-k, m) = G(-k, -m) = G(k, m).$$

Wir nehmen infolgedessen im weiteren k und m als positiv an.

Wegen der Darstellung (C.1) der Kugelfunktionen enthält G einen Faktor

$$(51) \quad (\sin \vartheta)^{2|m|-1};$$

soll G konstant sein, so muß also gelten

$$(52) \quad |m| = 1/2.$$

Aus den Auf- und Absteigerrelationen (C.9,10) ergibt sich

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_k^0 = \sqrt{k(k+1)} e^{-i\tilde{\varphi}} Y_k^1,$$

$$(54) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_k^1 = -\cot \vartheta \cdot Y_k^1 - \sqrt{k(k+1)} e^{+i\tilde{\varphi}} Y_k^0.$$

Damit erhalten wir aus der Bedingung

$$(55) \quad G(k, 1/2) = \text{const.}, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} G(k, 1/2) = 0$$

sofort

$$(56) \quad Y_k^1 \left(Y_k^0 + \sqrt{\frac{k+1}{k}} \cot \vartheta e^{-i\tilde{\varphi}} Y_k^1 \right) = 0,$$

und daraus weiter

$$(57) \quad \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} Y_k^0 = k Y_k^0$$

mit der Lösung

$$(58) \quad Y_k^0 = \text{const.} \cdot \cos^k \vartheta,$$

was nur erfüllt ist für $k = 1$. Man berechnet leicht:

$$(59) \quad G(\pm 1, \pm \frac{1}{2}) = \frac{1}{4\pi}.$$

Wir sehen somit, daß für $k = \pm 1$, $m = \pm \frac{1}{2}$, also für S - und $P_{1/2}$ -Zustände, die Lösungen (7), (12) von (1) eine kugelsymmetrische Dichtefunktion $\bar{\psi}\psi$ (und $\psi^+\psi$) besitzen. Für andere Werte der Quantenzahl k scheint sich dagegen auch durch Überlagerung mehrerer Lösungen Winkelunabhängigkeit nur für den Fall $\bar{\psi}\psi = 0$ erreichen zu lassen, der bereits im Kapitel III/4 behandelt ist.

5) Berechnung der Radialfunktionen

Wir bezeichnen die Lösungen (7) der Gleichung (1) fortan mit $\psi(k, m, \omega)$. Nachdem die Gleichungen (10), (11) nicht von der Quantenzahl m abhängen, haben zwei Lösungen $\psi(k_1, m_1, \omega_1)$ und $\psi(k_2, m_2, \omega_2)$ für $k_1 = k_2$ und $\omega_1 = \omega_2$ bei gleichen Anfangswerten die gleichen Radialfunktionen f und g . Eine Überlagerung von solchen Funktionen hat also die Gestalt

$$(60) \quad \begin{aligned} \psi &= \sum_m c_m \psi(k, m, \omega) = \\ &= (f(r) - \omega g(r)) e^{i\omega t} \cdot \Lambda \end{aligned}$$

mit einem noch von den Winkeln abhängigen Spinor Λ , für den gilt

$$(61) \quad \frac{1 + \tau^0}{2} \Lambda = \Lambda.$$

Wir setzen

$$(62) \quad \Lambda^+ \Lambda = F,$$

dann erhalten wir

$$(63) \quad \bar{\psi}\psi = (|f(r)|^2 - |g(r)|^2) \cdot F,$$

wo F noch von den Winkeln abhängen kann.

Wählen wir nun eine solche Überlagerung der $\varphi(k, w, \omega)$, daß F konstant ist (wir haben oben gezeigt, daß dies zumindest für $|k| = 1$ erfüllbar ist), und beachten, daß durch die Zerlegung (7) f und g nur bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt sind, so können wir leicht erreichen, daß f und g reell sind und daß gilt

$$(64) \quad F = 1.$$

Damit erhalten wir aus (10), (11) und (45) das gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$(65) \quad \begin{aligned} \frac{df}{dr} &= -\frac{1-k}{r} f - (\varphi - \omega) g, \\ \frac{dg}{dr} &= -\frac{1+k}{r} g - (\varphi + \omega) f, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + f^2 - g^2, \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(66) \quad \begin{aligned} r^{1-k} f(r) \big|_{r=0} &= f_0, \quad g(0) = 0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dr} \big|_{r=0} = 0, \end{aligned}$$

für das wir Lösungen finden wollen, die überall beschränkt sind.

Die rechten Seiten von (65) sind für $r \neq 0$ holomorphe Funktionen in $r, f, g, \varphi, \varphi'$. Daraus folgt nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie (83), daß für jeden (komplexen) Satz von Anfangswerten $(\tau_0, f(\tau_0), g(\tau_0), \varphi(\tau_0), \varphi'(\tau_0))$ genau ein in einer Umgebung von τ_0 komplex analytischer Lösungssatz $\Phi = (f, g, \varphi, \varphi')$ existiert. Für $r = 0$ ist das System (65) singulär; jedoch existiert trotzdem, wie im Anhang D gezeigt wird, ein eindeutig bestimmter, bei $r = 0$ holomorpher Lösungssatz genau dann, wenn man die speziellen Anfangsbedingungen (66)

fordert. Diese Lösung läßt sich in einer Umgebung der reellen τ - Achse nach rechts bis zum Rand des Holomorphiegebietes fortsetzen. Auf dem Rand werden die rechten Seiten von (65) singular, das ist nur dadurch möglich, daß eine der Feldgrößen f, g, φ' unendlich groß wird. Die von uns gesuchten, überall beschränkten Lösungen sind also längs der ganzen reellen τ - Achse holomorph.

Ist $f_0 = 0$, so kann man sofort die Lösung

$$(67) \quad f(\tau) = g(\tau) = 0, \quad \varphi(\tau) = \varphi_0$$

ablesen; für andere Anfangswerte scheint (65) dagegen einer analytischen Auflösung unzugänglich zu sein. Für den Fall $k = 1$, für den $\overline{\Psi}\Psi$, wie oben gezeigt wurde, stets radial-symmetrisch ist, wurde (65) daher numerisch weiter untersucht.

Durch eine Dilatation (II.55)

$$(68) \quad \begin{aligned} \tau &\rightarrow \lambda \tau, \quad \varphi \rightarrow \lambda^{-1} \varphi, \quad \omega \rightarrow \lambda^{-1} \omega, \\ f &\rightarrow \lambda^{-3/2} f, \quad g \rightarrow \lambda^{-3/2} g, \end{aligned}$$

und eine Phasentransformation (II.69)

$$(69) \quad f \rightarrow e^{i\beta} f, \quad g \rightarrow e^{i\beta} g,$$

läßt sich (außer im obigen trivialen Sonderfall) stets erreichen, daß gilt

$$(70) \quad f_0 = 1.$$

Damit lauten unsere Anfangsbedingungen:

$$(71) \quad \begin{aligned} f(0) &= 1, \quad g(0) = 0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi'(0) = 0. \end{aligned}$$

Es wurden nun solche Wertepaare (φ_0, ω) gesucht, für die sich ein durch numerische Quadratur berechnetes Anfangsstück der Lösung von (65), (66) an die Randbedingungen (38), (39) bzw. (42), (43) anpassen ließ; die dabei erhaltenen Ergebnisse zeigt Figur 1.

Wir unterscheiden in der (φ_0, ω) - Ebene vier Gebiete:

I) zwischen den Kurven A und B:

Hier liegen Streuzustände, d.h. Lösungen mit dem asymptotischen Verhalten (38), (39). Alle Lösungen aus diesem Gebiet sind beschränkt, φ_∞ liegt zwischen $+\omega$ und $-\omega$.

II) zwischen A bzw. B und der φ_0 - Achse:

Die ausgezogenen Linien sind Ortskurven für gebundene Zustände, d.h. Lösungen zu den Randbedingungen (42), (43); n_f, n_g , die Anzahl der Nullstellen der f - und g - Funktionen, sind längs einer Ortskurve konstant. Für höhere Knotenzahlen häufen sich die Ortskurven gegen die gestrichelte Kurve C. Für (φ_0, ω) - Werte, die zwischen den gebundenen Zuständen liegen, haben die Lösungen von (65), (66) eine Singularität auf der reellen Achse; f und g gehen dort monoton gegen Unendlich, so daß man die gesuchten beschränkten Lösungen durch Eingabeln finden kann. Bei den zwischen C und der φ_0 - Achse liegenden Bindungszuständen ist φ_0 positiv und größer als $|\omega|$, unterhalb der Kurve C dagegen negativ und kleiner als $-|\omega|$.

III) zwischen der φ_0 - Achse und der Kurve D:

Hier konnten bisher keine beschränkten Lösungen gefunden werden. f und g oszillieren in der Nähe ihrer Singularität sehr stark, während die Amplitude über alle Grenzen wächst; daher ist die Methode des Eingabelns hier nicht anwendbar.

IV) rechts von der Kurve D:

Hier liegen Streuzustände wie im Bereich I.

Figur 2 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus Figur 1, Figur 3 und 4 einige typische Sätze von Radialfunktionen.

An unserem Ergebnis ist auffallend, daß sich zu festgelegten Knotenzahlen n_f, n_g noch eine eindimensionale Schar von (φ_0, ω) - Paaren ergibt. Daß diese Lösungen nicht trivial äquivalent sind, kann man wohl am einfachsten aus der Potenzreihenentwicklung der Radialfunktionen

$$\begin{aligned} f(r) &\simeq 1 + \frac{1}{3}(\varphi_0^2 - \omega^2)r^2 + \dots \\ (72) \quad g(r) &\simeq -\frac{1}{3}(\varphi_0 + \omega)r + \dots \\ \varphi(r) &\simeq \varphi_0 + \frac{1}{3}r^2 + \dots \end{aligned}$$

ersehen, die von zwei Parametern wesentlich abhängt. Nach den Ergebnissen von Kapitel II ist auch keine einfache Invarianzgruppe mehr frei, die man mit dem neuen Freiheitsgrad in Verbindung bringen könnte.

Um dennoch ein diskretes Spektrum der gebundenen Zustände zu erzwingen, sind noch verschiedene Möglichkeiten offen:

erstens kann man beispielsweise noch eine weitere Randbedingung fordern, etwa den Wert von φ_∞ oder besser, da konforminvariant, das Verhältnis von φ_∞ und ω festlegen;

zweitens kann man Integralwerte vorschreiben, etwa den Wert der elektrischen Ladung Q (II.121) oder auch die Feldenergie E (II.51) in Einheiten von ω (um ein konforminvariantes Kriterium zu erhalten).

Beides stößt in der Praxis auf Schwierigkeiten, die darin begründet sind, daß $\varphi(r)$ nach außen nur wie $1/r$ abfällt, so daß zur halbwegs genauen Bestimmung von φ_∞ bzw. E ein beträchtlicher Rechenaufwand erforderlich ist. Wir haben auf eine genauere Untersuchung dieser Möglichkeiten daher verzichtet.

Bei der Herleitung der Ergebnisse dieses Kapitels haben wir von der Vertauschbarkeit der Spinorgrößen keinen Gebrauch gemacht. Unsere Resultate gelten also unverändert auch in dem der Quantenfeldtheorie näherstehenden Fall antivertauschbarer klassischer Spinoren.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. F. Bopp, bin ich für die Überlassung des Themas und zahlreiche kritische Anregungen aufrichtig zu Dank verpflichtet.

Dem Institut für Plasmaphysik in Garching danke ich für großzügige Gewährung von Rechenzeit.

Figure 1

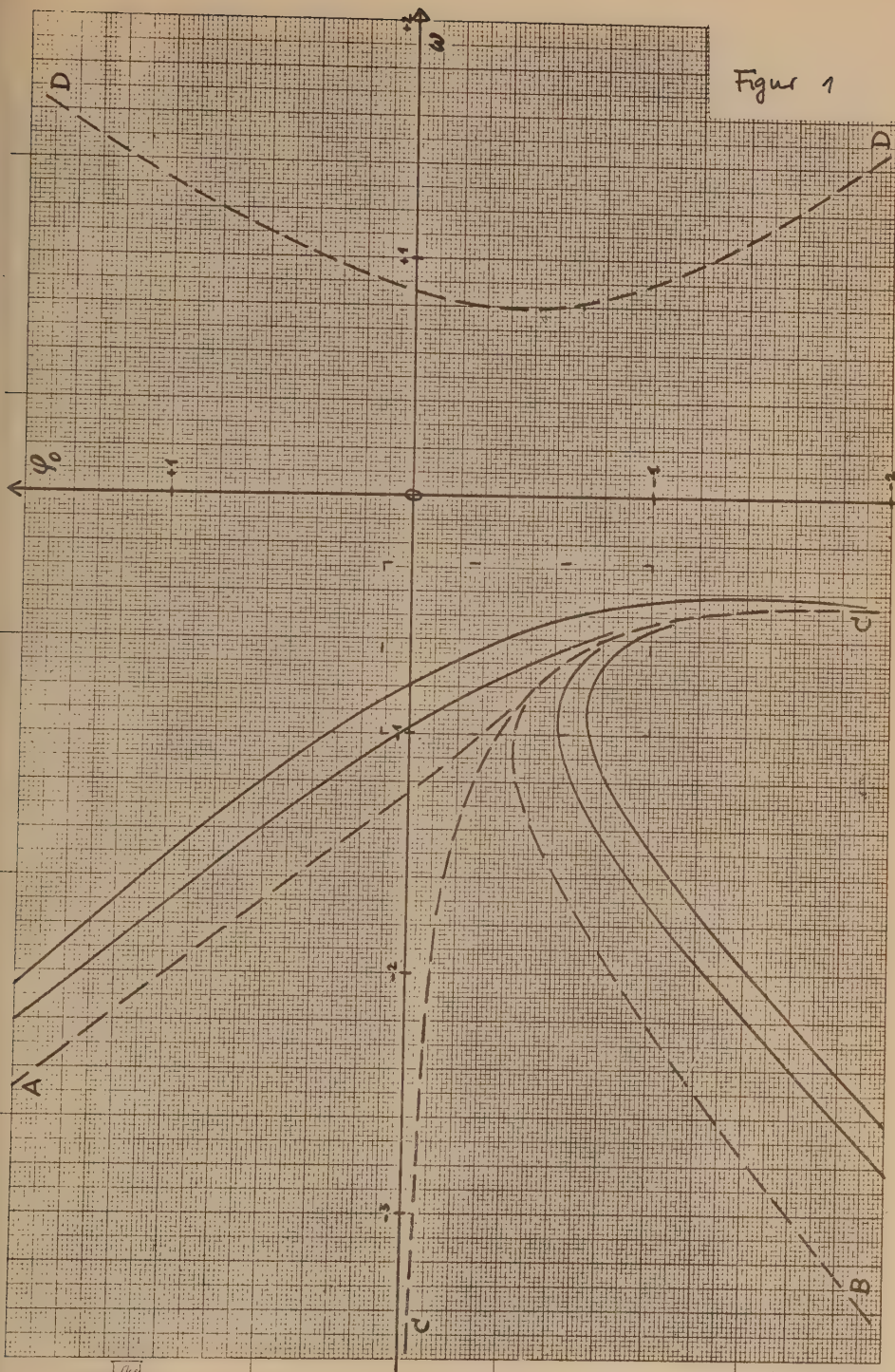


Figure 2

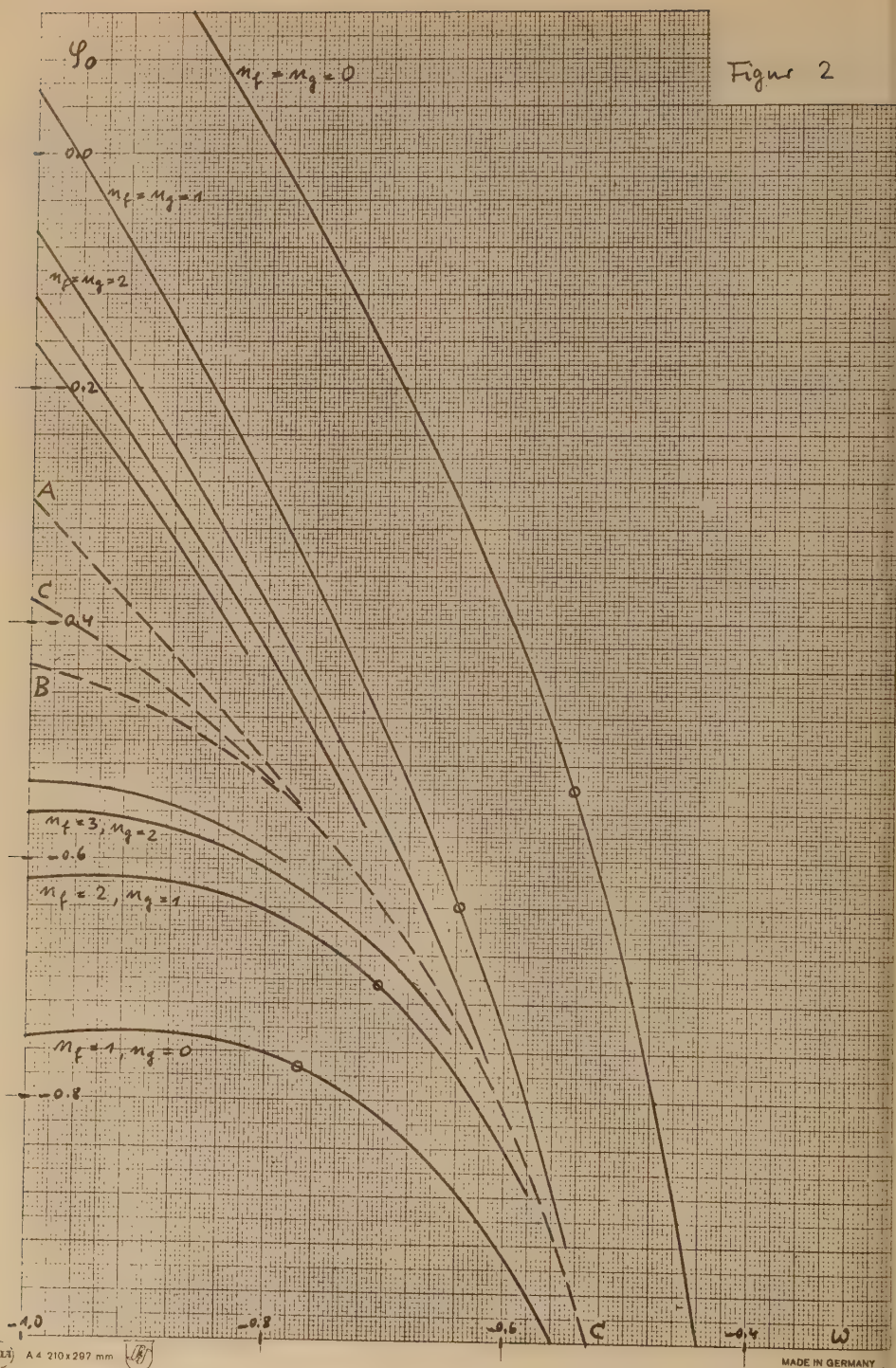


Figure 3

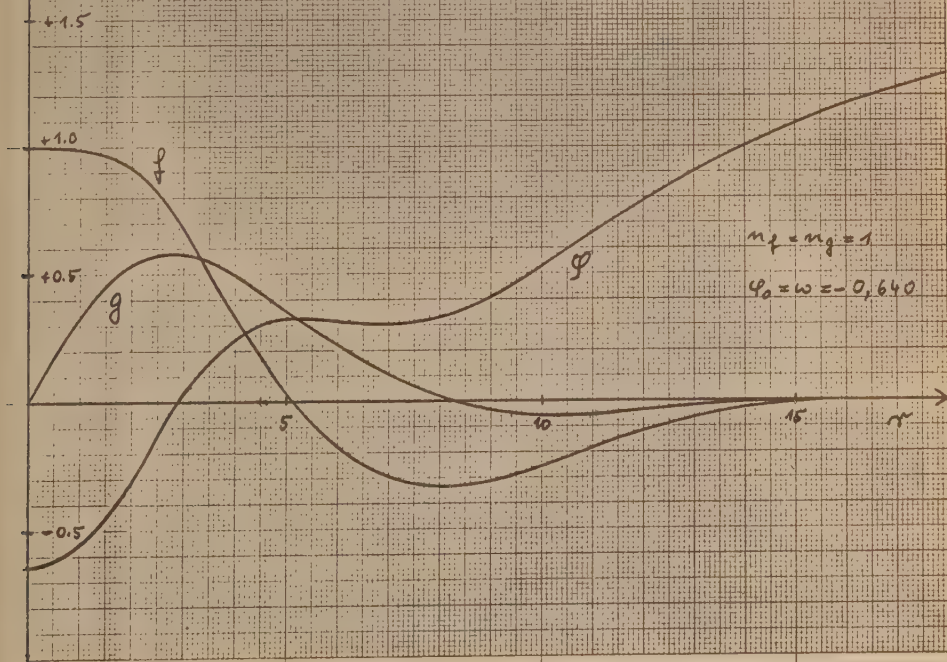
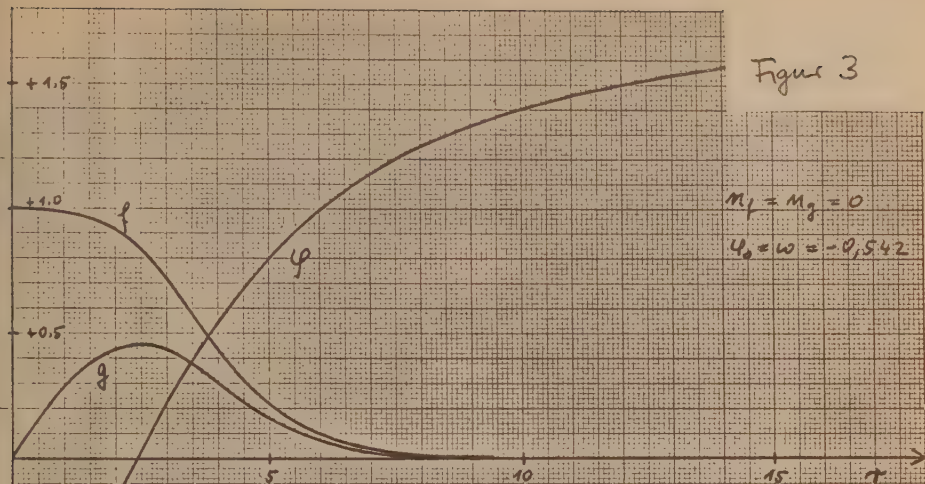


Figure 4

$$m_f = 1, m_g = 0$$

$$\varphi_0 = \omega = -0,763$$

$$m_f = 2, m_g = 1$$

$$\varphi_0 = \omega = -0,705$$

Anhang A) Häufig gebrauchte Formeln

Wir fassen Raum- und Zeitkoordinaten mittels

$$(1) \quad x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, x, y, z)$$

zu einem Vierervektor zusammen; lorentzinvariante Skalarprodukte bilden wir durch

$$(2) \quad g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

mit dem metrischen Tensor

$$(3) \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

den wir auch benutzen, um gemäß

$$(4) \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad b^\rho = g^{\rho\sigma} b_\sigma$$

Indizes zu heben und zu senken. Über paarweise auftretende Indizes soll stets summiert werden.

Die γ - Matrizen werden durch

$$(5) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu},$$

$$(6) \quad \gamma^{0+} = \gamma^0, \quad \vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

bis auf unitäre Transformationen bestimmt, dabei bedeutet $\gamma^{\mu+}$ die zu γ^μ hermiteisch konjugierte Matrix $(\gamma^\mu)^\dagger$.

Weiter definiert man

$$(7) \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

$$(8) \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma_5 = \gamma_5^+,$$

$$(9) \quad g^{\mu 5} = g_{\mu 5} = -\delta_{\mu 5}$$

sowie

$$(10) \quad \gamma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu).$$

Dann gilt

$$(11) \quad [\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 2i (g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\nu\rho} \gamma^\mu),$$

$$(12) \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma_\mu,$$

$$(13) \quad \gamma^{\mu\nu+} = \gamma^0 \gamma^{\mu\nu} \gamma^0 = \gamma_{\mu\nu},$$

wobei infolge der Verabredung (9) hier, wie auch schon in (5), die Indizes μ, ν, ρ auch den Wert 5 annehmen dürfen.

Die Matrizen $\gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}$ für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 5$ und die vierdimensionale Einheitsmatrix sind linear unabhängig und spannen die Algebra der 4x4-Matrizen auf.

Gelegentlich verwenden wir den Ausdruck

$$(14) \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -(\gamma^{23}, \gamma^{31}, \gamma^{12})$$

mit den Eigenschaften

$$(15) \quad \sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k = 2 \delta_{kl},$$

$$(16) \quad \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2,$$

$$(17) \quad \vec{\sigma} = \gamma_{05} \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \gamma_{05}, \quad (\gamma_{05})^2 = -1,$$

$$(18) \quad \vec{\gamma} = -\gamma_{05} \vec{\sigma} = -\vec{\sigma} \gamma_{05}.$$

Es gilt

$$(19) \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \vec{\sigma} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

und

$$(20) \quad \vec{\gamma} \cdot \vec{a} \vec{\gamma} \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

daraus folgt u.a.

$$(21) \quad \vec{r} \cdot \nabla \vec{r} \cdot \vec{\nabla} = r \frac{\partial}{\partial r} - \vec{r} \cdot \vec{\nabla}$$

wobei $\vec{M}$ den Drehimpulsoperator bedeutet.

Eine spezielle Darstellung der γ - Algebra wird gegeben durch

$$(22) \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\Sigma} \\ -\vec{\Sigma} & \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\Sigma} & \\ & \vec{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad -i\gamma^5 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_{05} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

$$\gamma^0 \vec{\gamma} = -i\gamma^5 \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} & \vec{\Sigma} \\ \vec{\Sigma} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 \vec{\sigma} = i\gamma^5 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\Sigma} & \\ & -\vec{\Sigma} \end{pmatrix}.$$

Hier bedeutet

$$(23) \quad \vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$$

mit

$$(24) \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die PAULIschen Spinmatrizen. Die Matrix B aus (II.83-85) besitzt in dieser Darstellung die Gestalt

$$(25) \quad B = \begin{pmatrix} & & +1 \\ & -1 & \\ +1 & & \end{pmatrix}$$

Anhang B: Auflösung des Systems (II.21)

Um die Gleichungen (II.21)

$$(1) \quad \partial_\varrho \delta x^\sigma + \partial^\sigma \delta x_\varrho = \frac{1}{2} \delta_\varrho^\sigma \partial_\mu \delta x^\mu$$

aufzulösen, multiplizieren wir sie mit dem Differentialoperator $\partial^\varrho \partial_\sigma$; so erhalten wir

$$(2) \quad \square \partial_\sigma \delta x^\sigma + \square \partial^\sigma \delta x_\sigma = \frac{1}{2} \square \partial_\mu \delta x^\mu$$

oder

$$(3) \quad \square \partial_\mu \delta x^\mu = 0,$$

also

$$(4) \quad \square \delta T = 0.$$

Gleichung (II.18) ist also eine Folge von (II.17).

Wir ziehen in (1) den Index σ herunter und differenzieren nach x^τ ; so ergibt sich

$$(5) \quad \partial_\varrho \partial_\tau \delta x^\sigma + \partial_\tau \partial_\sigma \delta x_\varrho = \frac{1}{2} g_{\varrho\sigma} \partial_\tau \partial_\mu \delta x^\mu$$

Hierzu addieren wir die beiden Gleichungen, die sich durch zweimalige zyklische Vertauschung von ϱ , σ und τ ergeben, und erhalten

$$(6) \quad \begin{aligned} & \partial_\varrho \partial_\tau \delta x^\sigma + \partial_\tau \partial_\sigma \delta x_\varrho + \partial_\sigma \partial_\varrho \delta x_\tau = \\ & = \frac{1}{4} (g_{\varrho\sigma} \partial_\tau + g_{\sigma\tau} \partial_\varrho + g_{\tau\varrho} \partial_\sigma) \partial_\mu \delta x^\mu, \end{aligned}$$

und daraus

$$(7) \quad \partial_\varrho \partial_\sigma \delta x_\tau = \frac{1}{4} (g_{\varrho\tau} \partial_\sigma + g_{\sigma\tau} \partial_\varrho - g_{\varrho\sigma} \partial_\tau) \partial_\mu \delta x^\mu,$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach x^λ , so folgt

$$(8) \quad \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\sigma \delta x_\tau = \frac{1}{4} (g_{\rho\tau} \partial_\lambda \partial_\sigma + g_{\sigma\tau} \partial_\lambda \partial_\rho - g_{\rho\sigma} \partial_\lambda \partial_\tau) \partial_\mu \delta x^\mu.$$

Ziehen wir hiervon die Gleichung ab, die durch Vertauschung von λ und ρ entsteht, und beachten wir, daß die Differentiationen vertauschbar sind, so erhalten wir

$$(9) \quad \frac{1}{4} (g_{\rho\tau} \partial_\lambda \partial_\sigma - g_{\lambda\tau} \partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial_\lambda \partial_\tau + g_{\lambda\sigma} \partial_\rho \partial_\tau) \partial_\mu \delta x^\mu = 0.$$

Kontraktion nach λ und τ ergibt

$$(10) \quad (-2 \partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \square) \partial_\mu \delta x^\mu = 0;$$

wegen (3) folgt daraus

$$(11) \quad \partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu \delta x^\mu = 0$$

und damit

$$(12) \quad \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\sigma \delta x_\tau = 0.$$

Die δx_τ sind also höchstens quadratische Polynome in den x^μ .

Wir gehen nun mit dem Ansatz

$$(13) \quad \delta x_\tau = a_\tau + b_{\tau\lambda} x^\lambda + D_{\tau\lambda\mu} x^\lambda x^\mu$$

in die Gleichung (1) ein; da (1) homogen ist, sind die Glieder verschieden hoher Ordnung in den x^μ voneinander unabhängig.

Setzen wir zunächst $D_{\tau\lambda\mu} = 0$, so ergibt (1):

$$(14) \quad b_{\tau\sigma}^{\cdot\sigma} + b_{\rho}^{\cdot\sigma} = \frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma b_{\tau\tau}^{\cdot\tau};$$

dies wird gelöst durch

$$(15) \quad b_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \varphi + \frac{1}{2} (\omega_{\lambda\mu} - \omega_{\mu\lambda})$$

mit willkürlichen $\varphi, \omega_{\lambda\mu}$.

Nehmen wir andererseits an: $b_{\lambda\mu} = 0$, so erhalten wir aus (7):

$$(16) \quad D_{\tau\varrho\sigma} + D_{\tau\sigma\varrho} = \frac{1}{2}(g_{\varrho\tau} D^{\lambda}_{\lambda\sigma} + g_{\sigma\tau} D^{\lambda}_{\lambda\varrho} - g_{\varrho\sigma} D^{\lambda}_{\lambda\tau}).$$

Setzt man nun

$$(17) \quad D^{\lambda}_{\lambda\varrho} = 4 c_{\varrho}$$

und beachtet, daß D auf den beiden letzten Indizes symmetrisch ist, so folgt:

$$(18) \quad D_{\tau\varrho\sigma} = g_{\varrho\tau} c_{\sigma} + g_{\sigma\tau} c_{\varrho} - g_{\varrho\sigma} c_{\tau}.$$

Die c_{τ} in (13) sind willkürliche Konstanten.

Damit lauten unsere infinitesimalen Transformationen:

$$(19) \quad \begin{aligned} dx_{\tau} = & a_{\tau} + \frac{1}{2}(\omega_{\tau\sigma} - \omega_{\sigma\tau})x^{\sigma} + \varphi \cdot x_{\tau} + \\ & + 2 c_{\sigma} x^{\sigma} x_{\tau} - c_{\tau} x^{\sigma} x_{\sigma}. \end{aligned}$$

Dies sind nach <65>, <66> gerade die Erzeugenden der konformen Gruppe G_{15}^{+} .

Anhang C: Drehimpulseigenfunktionen

Wir definieren die normierten Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators nach <77> durch

$$(1) \quad Y_l^m = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot \frac{(-1)^{l+m}}{2^l \cdot l!} \times \\ \times \sin^m \vartheta \left(\frac{d}{d \cos \vartheta} \right)^{l+m} \sin^{2l} \vartheta \\ \text{für } l \geq 0, |m| \leq l,$$

$$(2) \quad Y_l^m = 0 \quad \text{für } l \geq 0, |m| > l.$$

Auf negative l erweitern wir die Definition durch

$$(3) \quad Y_l^m = (-1)^m Y_{-l-1}^m.$$

Weiterhin gilt

$$(4) \quad Y_l^{-m} = (-1)^m e^{-2im\varphi} Y_l^m,$$

$$(5) \quad Y_l^m * = (-1)^m Y_l^{-m}.$$

Die Normierungsbedingung lautet

$$(6) \quad \int Y_{l_1}^{m_1 *} Y_{l_2}^{m_2} d\Omega = \delta_{m_1, m_2} (\delta_{l_1, l_2} + (-1)^{m_1} \delta_{l_1, -l_2-1}).$$

Die Y_l^m genügen den Eigenwertgleichungen

$$(7) \quad \vec{M}^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m,$$

$$(8) \quad M_3 Y_l^m = m Y_l^m$$

und den Auf- und Absteigerrelationen

$$(9) \quad (M_1 \pm i M_2) Y_l^m = \sqrt{l \mp m} \cdot \sqrt{l \pm m + 1} Y_l^{m \pm 1} = \\ = -\sqrt{-l \pm m} \cdot \sqrt{-l \mp m - 1} Y_l^{m \pm 1}.$$

dabei bedeuten

$$(10) \quad M_1 \pm i M_2 = e^{\pm i\varphi} \left(i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right),$$

$$(11) \quad M_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

die Komponenten des Drehimpulsoperators.

Wir benötigen noch die Hilfsformeln

$$\cos \vartheta Y_\ell^m =$$

$$(12) \quad = \sqrt{\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}} Y_{\ell+1}^m + \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}} Y_{\ell-1}^m,$$

$$\sin \vartheta e^{\pm i\varphi} Y_\ell^m =$$

$$(13) \quad = \mp \sqrt{\frac{(\ell \pm m+1)(\ell \pm m+2)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}} Y_{\ell+1}^{m \pm 1} \pm \sqrt{\frac{(\ell \mp m)(\ell \mp m-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}} Y_{\ell-1}^{m \pm 1};$$

aus ihnen folgt durch Linearkombination

$$(14) \quad \sqrt{\frac{\ell \pm m+1}{2\ell+1}} \cos \vartheta Y_\ell^m \mp \sqrt{\frac{\ell \pm m}{2\ell+1}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} Y_\ell^{m \mp 1} = \sqrt{\frac{\ell \pm m+1}{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^m,$$

$$(15) \quad \sqrt{\frac{\ell \pm m}{2\ell+1}} \cos \vartheta Y_\ell^m \pm \sqrt{\frac{\ell \pm m+1}{2\ell+1}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} Y_\ell^{m \mp 1} = \sqrt{\frac{\ell \mp m}{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^m.$$

Damit können wir (IV.12) beweisen:

Mit der aus (IV.7) folgenden Zerlegung

$$(16) \quad \begin{aligned} \psi &= (f(r) - W g(r)) e^{i(\omega t + \beta)} \cdot \mathcal{Q} = \\ &= (g(r) - W f(r)) e^{i(\omega t + \beta)} \cdot (-W \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

erhalten wir unter Verwendung von (IV.8):

$$(17) \quad \begin{aligned} -W \mathcal{Q} &= -\delta_5 \delta_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \left(\sqrt{\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} - \sigma_1 \sqrt{\frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \right) \Gamma = \\ &= -\delta_5 \delta_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \left(\frac{1+\sigma_3}{2} \sqrt{\frac{k+m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m-\frac{1}{2}} - \frac{1-\sigma_3}{2} \sigma_1 \sqrt{\frac{k-m-\frac{1}{2}}{2k-1}} Y_{-k}^{m+\frac{1}{2}} \right) \Gamma \end{aligned}$$

und daraus

$$(18) \quad -WQ = -\gamma_5 \gamma_0 \frac{1+\sigma_3}{2} \left(\sqrt{\frac{k+m+1/2}{2k-1}} \cos \vartheta Y_{-k}^{m-1/2} - \sqrt{\frac{k-m-1/2}{2k-1}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} Y_{-k}^{m+1/2} \right) \Gamma -$$

$$-\gamma_5 \gamma_0 \frac{1-\sigma_3}{2} \sigma_1 \left(\sqrt{\frac{k-m-1/2}{2k-1}} \cos \vartheta Y_{-k}^{m+1/2} + \sqrt{\frac{k+m-1/2}{2k-1}} \sin \vartheta e^{i\varphi} Y_{-k}^{m-1/2} \right) \Gamma.$$

Mit (14), (15) ergibt sich

$$(19) \quad -WQ = -\gamma_5 \gamma_0 \left(\frac{1+\sigma_3}{2} \sqrt{\frac{k-m+1/2}{2k+1}} Y_{-k-1}^{m-1/2} + \frac{1-\sigma_3}{2} \sigma_1 \sqrt{\frac{k+m+1/2}{2k+1}} Y_{-k-1}^{m+1/2} \right) \Gamma,$$

und mit (3) und (IV.8)

$$(20) \quad -WQ = (-1)^{m+1/2} \left(\sqrt{\frac{k-m+1/2}{2k+1}} Y_{+k}^{m-1/2} - \sigma_1 \sqrt{\frac{k+m+1/2}{2k+1}} Y_{+k}^{m+1/2} \right) \gamma_5 \Gamma,$$

was mit (16) auf (IV.12) führt.

Anhang D: Lösbarkeit des Systems (IV.65)

Es sollen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad \frac{df}{dr} + \frac{1-k}{r} f(r) = -(\varphi(r) - \omega) g(r),$$

$$(2) \quad \frac{dg}{dr} + \frac{1+k}{r} g(r) = -(\varphi(r) + \omega) f(r),$$

$$(3) \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = f(r)^2 - g(r)^2$$

gefunden werden, die den Anfangsbedingungen

$$(4) \quad r^{1-k} f(r)|_0 = f_0, g(0) = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \frac{d\varphi}{dr}|_0 = 0$$

genügen. Um die Existenz solcher Lösungen zu zeigen, betrachten wir die Integraltransformation

$$(5) \quad \bar{f}(r) = r^{k-1} \left(f_0 - \int_0^r (\varphi(\varrho) - \omega) g(\varrho) \varrho^{1-k} d\varrho \right),$$

$$(6) \quad \bar{g}(r) = -\frac{1}{r^{k+1}} \int_0^r (\varphi(\varrho) + \omega) f(\varrho) \varrho^{1+k} d\varrho,$$

$$(7) \quad \bar{\chi}(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r (f(\varrho)^2 - g(\varrho)^2) \varrho^2 d\varrho,$$

$$(8) \quad \bar{\varphi}(r) = \varphi_0 + \int_0^r \chi(\varrho) d\varrho$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(9) \quad \bar{\varphi} = T\varphi,$$

wobei wir unter φ das Funktionenquadrupel

$$(10) \quad \varphi = (f, g, \chi, \varphi)$$

verstehen wollen. r fassen wir als komplexe Veränderliche auf; die Integrale in (5 - 8) sollen längs der Verbindungsstrecke von 0 und r genommen werden.

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller stetigen Funktionensätze φ , welche die Bedingungen

$$|f(\tau)| \leq F \cdot |\tau|^{k-1}, |g(\tau)| \leq G \cdot |\tau|^{k-1},$$

$$(11) \quad |\varphi(\tau)| \leq \Phi, |\chi(\tau)| \leq X$$

$$\text{für } |\tau| \leq \tau_0$$

sowie

$$\tau^{1-k} f(\tau)|_0 = f_0, g(0) = 0,$$

(12)

$$\varphi(0) = \varphi_0, \chi(0) = 0$$

erfüllen; die Werte von F, G, Φ, X und τ_0 wollen wir erst später spezifizieren.

Wir schätzen nun mittels (11) ab:

$$(13) \quad \begin{aligned} |\bar{f}(\tau) - f_0 \cdot \tau^{k-1}| &= |\tau^{k-1} \int_0^\tau (\varphi(\varrho) - \omega) g(\varrho) \varrho^{1-k} d\varrho| \leq \\ &\leq (\Phi + |\omega|) \cdot G \cdot |\tau|^k, \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} |\bar{g}(\tau)| &= \left| \frac{1}{\tau^{k+1}} \int_0^\tau (\varphi(\varrho) + \omega) f(\varrho) \varrho^{k+1} d\varrho \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2k+1} (\Phi + |\omega|) \cdot F \cdot |\tau|^k, \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} |\bar{\chi}(\tau)| &= \left| \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau (f(\varrho)^2 - g(\varrho)^2) \varrho^2 d\varrho \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2k+1} (F^2 + G^2) \cdot |\tau|^{2k-1}, \end{aligned}$$

$$(16) \quad |\bar{\varphi}(\tau) - \varphi_0| = \left| \int_0^\tau \chi(\varrho) d\varrho \right| \leq X \cdot |\tau|;$$

für

$$(17) \quad F > |f_0|, \Phi > |\varphi_0|, G \text{ und } X \text{ beliebig}$$

gibt es dann ein $\tau_1 > 0$, so daß gilt:

$$(18) \quad |f_0| + (\Phi + |\omega|) \cdot G \cdot \tau_1 \leq F,$$

$$(19) \quad \frac{1}{2k+1} (\Phi + |\omega|) \cdot F \cdot \tau_1 \leq G,$$

$$(20) \quad \frac{1}{2k+1} (F^2 + G^2) \cdot \tau_1^{2k-1} \leq X,$$

$$(21) \quad |\varphi_0| + X \cdot \tau_1 \leq \Phi.$$

Wenn wir jetzt ein positives $\tau_0 \leq \tau_1$ wählen, so ist (11) auch für $\bar{\varphi}$ erfüllt, d.h. die Integraltransformation (5 - 9) führt nicht aus $\mathcal{M}$ hinaus.

Zwischen je zwei Elementen φ_1 und φ_2 von $\mathcal{M}$ führen wir durch

$$(22) \quad d = \|\varphi_1, \varphi_2\| = \sup_{|\tau| \leq \tau_0} \max \left(\left| \frac{f_1 - f_2}{\tau^{k-1}} \right|, \left| \frac{g_1 - g_2}{\tau^{k-1}} \right|, |\varphi_1 - \varphi_2|, |x_1 - x_2| \right)$$

einen Abstand ein; damit wird $\mathcal{M}$ zu einem vollständigen metrischen Raum, (78).

(22) ist gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$(23) \quad |f_1(\tau) - f_2(\tau)| \leq d \cdot |\tau|^{k-1},$$

$$(24) \quad |g_1(\tau) - g_2(\tau)| \leq d \cdot |\tau|^{k-1},$$

$$(25) \quad |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| \leq d,$$

$$(26) \quad |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \leq d$$

$$\text{für } |\tau| \leq \tau_0.$$

Damit können wir weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & |\bar{f}_1(\tau) - \bar{f}_2(\tau)| \leq \frac{1}{2} |\tau|^{k-1} \left(\left| \int_0^\tau (\varphi_1 - \varphi_2)(g_1 + g_2) \rho^{1-k} d\rho \right| + \right. \\
 & \left. + \left| \int_0^\tau (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\omega)(g_1 - g_2) \rho^{1-k} d\rho \right| \right) \leq \left(\frac{1}{2} d \left| \int_0^\tau (g_1 + g_2) \rho^{1-k} d\rho \right| + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} d \left| \int_0^\tau (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\omega) d\rho \right| \right) \cdot |\tau|^{k-1} \leq d \cdot (G + \Phi + |\omega|) \cdot |\tau|^k,
 \end{aligned}$$

und analog:

$$(28) \quad |\bar{g}_1(\tau) - \bar{g}_2(\tau)| \leq \frac{1}{2k+1} d \cdot (F + \Phi + |\omega|) \cdot |\tau|^k,$$

$$(29) \quad |\bar{\varphi}_1(\tau) - \bar{\varphi}_2(\tau)| \leq d \cdot |\tau|,$$

$$(30) \quad |\bar{\chi}_1(\tau) - \bar{\chi}_2(\tau)| \leq \frac{2}{2k+1} d \cdot (F + G) \cdot |\tau|^{2k-1}.$$

Wählen wir jetzt ein positives $\eta < 1$ und ein $\tau_2 \leq \eta$ mit

$$(31) \quad (G + \Phi + |\omega|) \cdot \tau_2 \leq \eta,$$

$$(32) \quad \frac{1}{2k+1} (F + \Phi + |\omega|) \cdot \tau_2 \leq \eta,$$

$$(33) \quad \frac{2}{2k+1} (F + G) \cdot \tau_2^{2k-1} \leq \eta$$

sowie

$$(34) \quad \vartheta < \tau_0 < \min(\tau_1, \tau_2),$$

so gilt

$$(35) \quad \|\bar{v}_1, \bar{v}_2\| \leq \eta \cdot \|v_1, v_2\|$$

für beliebige Elemente v_1, v_2 aus $\mathcal{M}$; T ist also eine Kontraktion. Daraus folgt nach bekannten Sätzen (<78> S.37), daß die Gleichung

$$(36) \quad v = Tv$$

in $\mathcal{M}$ genau eine Lösung hat, die sich für einen beliebigen Startwert η aus $\mathcal{M}$ zu

$$(37) \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n \eta$$

ergibt.

Für $\tau \neq 0$ können wir (36) umschreiben in

$$(38) \quad f(\tau) - f_0 \tau^{k-1} = -\tau^{k-1} \int_0^\tau (\varphi(\varrho) - \omega) g(\varrho) \varrho^{1-k} d\varrho,$$

$$(39) \quad \tau^{k+1} g(\tau) = - \int_0^\tau (\varphi(\varrho) + \omega) f(\varrho) \varrho^{1+k} d\varrho,$$

$$(40) \quad \tau^2 \chi(\tau) = \int_0^\tau (f(\varrho)^2 - g(\varrho)^2) \varrho^2 d\varrho,$$

$$(41) \quad \varphi(\tau) - \varphi_0 = \int_0^\tau \chi(\varrho) d\varrho.$$

Durch Differenzieren und Eliminieren von $\chi = \frac{d\varphi}{d\tau}$ erhalten wir gerade (1 - 3).

An der Stelle $\tau = 0$ ergibt sich einerseits

$$(42) \quad \begin{aligned} \left. \frac{dg}{d\tau} \right|_0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g(\varepsilon) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{k+2}} \int_0^\varepsilon (\varphi(\varrho) + \omega) f(\varrho) \varrho^{k+1} d\varrho = - \frac{1}{k+2} (\varphi(0) + \omega) f(0) \end{aligned}$$

und

$$(43) \quad \left. \frac{df}{d\tau} \right|_0 = (k-1) f_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{k-2} (\varphi(0) - \omega) g(0) = f_0 \delta_{k2},$$

andererseits

$$(44) \quad \left. \frac{1-k}{\tau} f(\tau) \right|_0 = (1-k) f_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{k-2} = - f_0 \delta_{k2}$$

und

$$(45) \quad \left. \frac{d\chi}{d\tau} \right|_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \chi(\varepsilon) = \frac{1}{3} (f(0)^2 - g(0)^2),$$

und damit

$$(46) \quad \left(\frac{df}{d\tau} + \frac{1-k}{\tau} f(\tau) \right) \Big|_0 = -(\varphi(0) - \omega) g(0),$$

$$(47) \quad \left(\frac{dg}{d\tau} + \frac{1+k}{\tau} g(\tau) \right) \Big|_0 = -(\varphi(0) + \omega) f(0),$$

$$(48) \quad \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \Big|_0 = f(0)^2 - g(0)^2.$$

Es sind also (1 - 3) durch (37) auch bei $\tau = 0$ erfüllt.

Aus unserer Abstandsdefinition (22) folgt, daß die Komponenten von $T^{\mu}\eta$ in (37) in der ganzen Kreisscheibe $|\tau| \leq \tau_0$ gleichmäßig konvergieren; wählen wir nun η holomorph, so sieht man aus (5 - 8), daß $T\eta$ und $T^{\mu}\eta$ und damit auch φ ebenfalls holomorph sind.

Wir haben somit gezeigt, daß das System (1 - 3) mit den Anfangsbedingungen (4) eine in einer komplexen Umgebung $|\tau| \leq \tau_0$ des Ursprungs eindeutig bestimmte, holomorphe Lösung φ besitzt. Die rechten Seiten von (1 - 3) sind analytisch, daher können wir unsere Lösung insbesondere bis zum ersten Randpunkt des Holomorphiegebiets von φ auf der reellen τ -Achse fortsetzen (83).

Anhang E: Beispiel einer wechselwirkungsfreien Lösung

Wir geben hier ein Beispiel für die Konstruktion wechselwirkungsfreier Lösungen nach Kapitel III/4 an, und zwar behandeln wir ebene Wellen von vorgegebenem Profil in φ . Wir setzen dazu an

$$(1) \quad \varphi = \varphi(\sigma),$$

$$(2) \quad \sigma = k^\mu x_\mu$$

Aus (III.58) folgt sofort

$$(3) \quad k^\mu k_\mu = 0,$$

die Welle pflanzt sich mit Lichtgeschwindigkeit fort. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir durch eine Lorentztransformation die spezielle Darstellung

$$(4) \quad k^\mu = (1, 0, 0, 1), \quad \sigma = t - z$$

erreichen.

Wir haben nun die Gleichung (III.59)

$$(5) \quad (-i \gamma^\mu \partial_\mu + \varphi(\sigma)) \psi = 0$$

aufzulösen; mit den neuen Koordinaten

$$(6) \quad \sigma = t - z, \quad \tau = t + z$$

nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(7) \quad (-i(\gamma^0 - \gamma^3) \frac{\partial}{\partial \sigma} - i(\gamma^0 + \gamma^3) \frac{\partial}{\partial \tau} - i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} - i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \varphi(\sigma)) \psi = 0.$$

Mit dem vor ψ stehenden Operator vertauschen die hermiteischen Operatoren des Transversalimpulses; es sei etwa

$$(8) \quad -i \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_1 \psi, \quad -i \frac{\partial}{\partial y} \psi = p_2 \psi, \quad -i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi = q \psi.$$

Dann bekommen wir aus (7)

$$(9) \quad (-i(\gamma^0 - \gamma^3) \frac{\partial}{\partial \sigma} + p_1 \gamma^1 + p_2 \gamma^2 + q(\gamma^0 + \gamma^3) + \varphi(\sigma)) \psi = 0.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit $\frac{1 \pm \gamma^0}{2}$ und setzen

$$(10) \quad \psi = e^{i(p_1 x + p_2 y + q(z+t))} \cdot \chi(\sigma),$$

$$(11) \quad \chi_1 = \frac{1 + \gamma^0}{2} \chi(\sigma), \quad \chi_2 = \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^3 \chi(\sigma) = \gamma^3 \frac{1 + \gamma^0}{2} \chi(\sigma).$$

So ergibt sich das System

$$(12) \quad \left(\frac{d}{d\sigma} + iq + i\varphi \right) \chi_1 - \left(\frac{d}{d\sigma} - iq + \gamma^{13} p_1 + \gamma^{23} p_2 \right) \chi_2 = 0,$$

$$(13) \quad \left(\frac{d}{d\sigma} - iq - \gamma^{13} p_1 - \gamma^{23} p_2 \right) \chi_1 - \left(\frac{d}{d\sigma} + iq - i\varphi \right) \chi_2 = 0.$$

Wir führen die Abkürzung

$$(14) \quad \Gamma = \gamma^{13} p_1 + \gamma^{23} p_2, \quad \Gamma^2 = p_1^2 + p_2^2$$

ein und addieren bzw. subtrahieren die Gleichungen (12) und (13). So erhalten wir

$$(15) \quad 2 \frac{d}{d\sigma} (\chi_1 - \chi_2) + (i\varphi - \Gamma)(\chi_1 + \chi_2) = 0,$$

$$(16) \quad 2iq(\chi_1 + \chi_2) + (i\varphi + \Gamma)(\chi_1 - \chi_2) = 0,$$

und daraus mit (14)

$$(17) \quad \left(4iq \frac{d}{d\sigma} + p_1^2 + p_2^2 + \varphi(\sigma)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0.$$

Der auf $\chi_1 - \chi_2$ wirkende Operator ist γ -frei; damit können wir durch

$$(18) \quad \chi_1 - \chi_2 = f(\sigma) \cdot \varphi$$

den konstanten Spinor φ abspalten und erhalten aus

$$(19) \quad 4iq \frac{d}{d\sigma} \ln f(\sigma) + p_1^2 + p_2^2 + \varphi(\sigma)^2 = 0$$

die Lösung

$$(20) \quad f(\sigma) = \exp\left(\frac{i}{4q} \int (p_1^2 + p_2^2 + \varphi(\sigma)^2) d\sigma\right).$$

$f(\sigma)$ hat also den Betrag 1.

Aus (16) und (18) ergibt sich

$$(21) \quad \chi_1 + \chi_2 = \frac{1}{2q} (i\Gamma - \varphi(\sigma)) f(\sigma) \varrho$$

und daraus wegen (11)

$$(22) \quad \chi(\sigma) = \frac{1}{4q} ((1-\gamma^3)(i\Gamma - \varphi(\sigma)) + 2q(1+\gamma^3)) f(\sigma) \varrho.$$

Damit ist eine partikuläre Lösung (10) für (5) bestimmt.

Die Kombination

$$(23) \quad \Psi = \psi + \psi^c$$

erfüllt, wie in III/4 gezeigt, zusammen mit unserem $\varphi(\sigma)$ die Feldgleichungen (II.4-6) sowie

$$(24) \quad \overline{\Psi} \Psi = 0,$$

ist also, wie behauptet, eine wechselwirkungsfreie Lösung.

Infolge der Linearität von (5) können wir weitere wechselwirkungsfreie Lösungen dadurch gewinnen, daß wir mehrere Sätze (10), (22) zu verschiedenen Werten p_1, p_2, q überlagern, ehe wir die Kombination (23) oder allgemeiner (III.60) bilden. Doch wollen wir dies hier im einzelnen nicht weiter ausführen.

Lebenslauf:

Am 26. September 1937 wurde ich als erster Sohn des Facharztes für innere Krankheiten Dr. med. Max Lagally und seiner Ehefrau Dr. med. Gertrud Lagally, geb. Haseneder, in München geboren.

Ich besuchte vier Jahre lang die Volksschulen in Freising, München und Peiting, Kreis Schongau, und ab Herbst 1947 das humanistische Gymnasium in Weilheim. 1950 trat ich als Stipendiat in das Landerziehungsheim Schondorf über, wo ich im Juli 1956 die Reifeprüfung nach dem Lehrplan des Realgymnasiums ablegte.

Im Wintersemester 1956/57 begann ich an der Universität München Mathematik und Physik zu studieren und legte im Frühjahr 1959 die Diplomvorprüfung in Mathematik ab. Das Wintersemester 1959/60 verbrachte ich an der Universität Heidelberg; seitdem studiere ich an der Universität München Theoretische Physik.

Im Sommer 1957 wurde ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen, der ich bis 1961 angehörte. Seit April 1961 verwalte ich am Institut für theoretische Physik der Universität München eine wissenschaftliche Assistentenstelle.

